

解開法院看見彩虹的秘密

摘要

司法博物館每到特定季節便會透過採光井形成彩虹投射在地板上，吸引我們思考建物出現這種彩虹的原因。

常見彩虹的形成方式有：光線經過三稜鏡兩次折射後，偏向角差異出現的色散現象；也有雨後天際常見的虹霓，那是光線通過水珠兩折一反或兩折兩反的色散結果。

經分析討論後認為採光井形成彩虹的條件均與上述兩種狀況不同。射入法院的陽光只有經過平板玻璃(兩次折射後只會平行偏移)及採光井平行面鏡的來回反射，這樣的物理條件不應出現彩虹。因此，我們大膽假設可能因為季節因素所致的溫、濕度不同，使不同色光在玻璃中折射率的細微變化及面鏡來回反射的放大效應所致。另外，我們還提出了平行面鏡的厚度因素(兩折一反)及光線經採光井面鏡接縫切角的三稜鏡效應等兩種模式進行分析，透過公式推導出紅、藍色光差距與各變因的關係式，再由 Desmos 及 Geogebra 進形模擬，探究這類建築結構會在室內形成彩虹的原因。

結果發現不同頻率的光線在相同介質中的折射率及空氣濕度、壓力等變化，是最為可能在法院看見彩虹的原因，至於其他兩種方式雖然也能出現色差，但與實際觀察測量的結果略有不同。我們透過本研究建立分析模式之後，位來可進行實物模擬，設計一間可以隨意產生彩虹的建築。



壹、研究動機及目的

一、研究動機

一次偶然的機會，去台南司法博物館(以下簡稱法院)參觀時，居然看到彩虹奇觀。抬頭一望，上方卻只有一個深長的採光井。印象中彩虹不是經過水滴或三稜鏡才會形成的嗎？在好奇心的驅使下查了資料，發現已有報紙介紹過出現在台南司法博物館的彩虹；令人感到驚奇的是，據報導館內的彩虹只在特定時間(4至5月和9至11月的上午9點至中午12點左右)才會出現。究竟是哪些因素造成彩虹出現的時間有選擇性呢？為回答這個問題，我們展開一系列的研究來探討可能與彩虹形成有關的變因。

根據國中自然與生或科技課本(翰林版，2019第四版)第三冊第四章「光、影像與顏色」第186頁的「色散與顏色」單元，我們知道彩虹形成原因和白光的色散及折、反射等過程有關。但是，如圖1-1所示，法院出現彩虹的的建物結構裡，只有透過的採光井平板透明厚玻璃及左右對稱的反射面鏡，按照未經色散的日照白光穿透平玻璃後應為兩次折射的平行偏移(如圖1-2)，若只是在兩對稱面鏡間來回反射，應該不會產生彩虹啊？另外，關於三稜鏡產生色散的討論，詳閱高中物理課本或搜尋網路之後，也只有提到折射率與介質有關，較少提到折射率與色光的頻率也有關係，而且，不同色光在不同溫濕度的空氣折射率也可能有變化。因此，我們由此想法出發，提出三種根據博物館特殊建築結構產生彩虹(如圖1-3)的可能模型進行探究，自學三角函數及電腦分析軟體，以下列三種待答問題形成本研究的目的，希望能建立分析的工具，進而像柯南一樣很科學地解開法院裡看見彩虹的可能原因。

待答問題一：是否因為不同頻率色光在不同環境的折射率變化導致光線經平板玻璃後不會平行偏移，而且出現些微的色散，進而因對稱面鏡的來回反射產生色差距放大效應？

待答問題二：是否因為對稱面鏡的厚度不同產生彩虹？

待答問題三：是否因為光線照射到對稱面鏡接縫切角不同產生彩虹？

二、研究目的

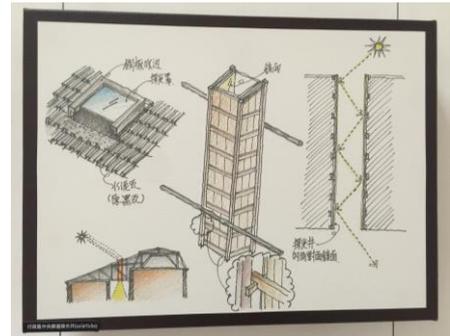


圖 1-1 司法博物館的採光天井

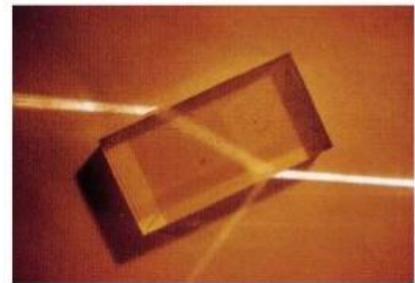


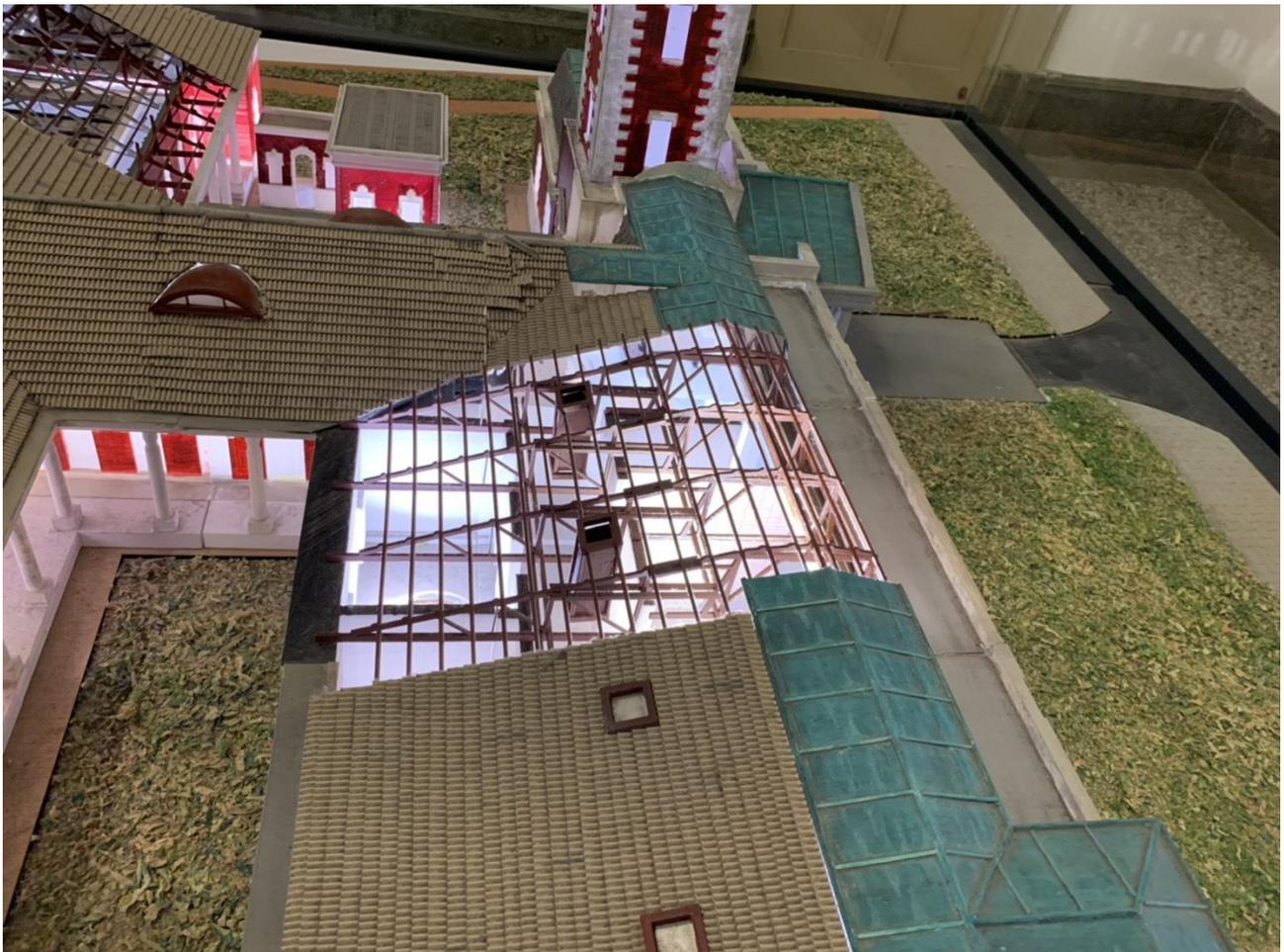
圖 1-2 白光經平玻璃的平行偏移



圖 1-3 法院裡看見的彩虹

我們利用 17 世紀時就發現的司乃爾定律加上建物採光結構先推導出數學公式，然後透過應用軟體 Desmos 和 GeoGebra 轉成模擬程式，計算分析在各種變因改變下的色差距變化(色差距：定義為藍光和紅光的間距)。研究目的如下：

- (一) 進行文獻探討與發展研究架構
- (二) 模擬分析各相關變因對色差的影響
- (三) 建立採光井彩虹相關變因的數位化模型



貳、文獻探討

一、司乃爾定律

1621年，威理博·司乃爾發現了折射定律。但是，他並沒有主動地將這定律發表出來。後來，於1703年克里斯蒂安惠·更斯在著作《Dioptrica》中談到此定律，才正式將此定律的發現歸功於司乃爾。

(一) 司乃爾定律之證明

如圖 2-1 所示，光波從介質 1 傳播進入介質 2，其入射角、折射角分別為 θ_1 、 θ_2 ，傳播速度分別為 v_1 、 v_2 ，假設 $v_1 > v_2$ 。在時間 t_j 時，光波的波前會包含點 A_j 和點 B_j 的位置，標記這時的波前為 $A_j B_j$ 。假設時間與之間隔為常數，則以下幾個直線段之間的長度相等關係成立：

$$A_0 A_1 = B_0 B_1 = B_1 B_2 = B_2 B_3 = v_1 \Delta t、$$

$$A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_4 = B_3 B_4 = v_2 \Delta t。$$

從波前的每一個點波源發射出的球面次波，分別在介質 1、介質 2 的傳播速度為 v_1 、 v_2 ，必須正切這些球面次波。特別而言，在時間間隔 Δt 之後，波前 $A_2 B_2$ 在介質 1 的部分必須平行於相距 $v_1 \Delta t$ 的波前，而波前 $A_2 B_2$ 在介質 2 的部分必須正切從點波源 A_1 發射出的半徑為 $v_2 \Delta t$ 的球面次波。所以，在通過界面時，會出現彎曲的波前 $A_2 B_2$ 。

由於光波傳播的方向垂直於波前，所以在介質 1、介質 2 裏，波前與界面之間的夾角分別等於入射角 θ_1 、折射角 θ_2 。直線段長度 $B_1 B_3$ 與 $A_1 A_3$ 之間的關係為

$$\frac{B_1 B_3}{\sin \theta_1} = A_1 B_3 = \frac{A_1 A_3}{\sin \theta_2}，即 \frac{v_1}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{\sin \theta_2}。$$

又折射率的定義式為 $nv = c$ ，因此，我們可以總結，司乃爾定律成立：

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

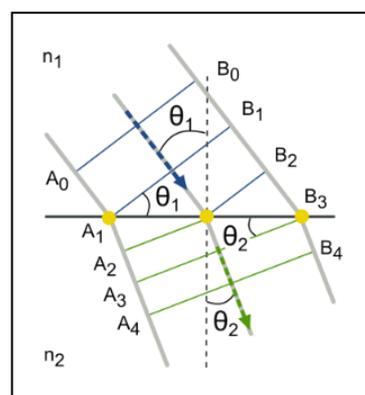


圖 2-1.

二、Edlen 公式

1965年 Bengt Edlen 提出了一個空氣折射率的公式，我們將藉由 Edlen 公式之大氣壓力及溫度來推算出折射率的範圍。

$$n_{t,P,f} = 1 + 2.87774 \times 10^{-9} \times \frac{1 + 10^{-10}(60.1 - 0.972t)P}{1 + 0.003661t}$$

P 為大氣壓力（單位：帕，Pa）

t 為溫度（單位：攝氏， $^{\circ}\text{C}$ ）

$n_{t,P,f}$ 為折射率

參、研究過程與方法

一、名詞定義

1. 司乃爾定律(Snell' s Law)：

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

2. Elden 公式：

$$n_{t,P,f} = 1 + 2.87774 \times 10^{-9} \times \frac{1 + 10^{-10}(60.1 - 0.972t)P}{1 + 0.003661t}$$

3. 色差距：

色光經過二個不同界質，並且在固定距離所造成的色光與色光之間的距離，本組將其定義為「色差距」。

二、發展研究架構

本組研究架構如下圖 3-1 所示。

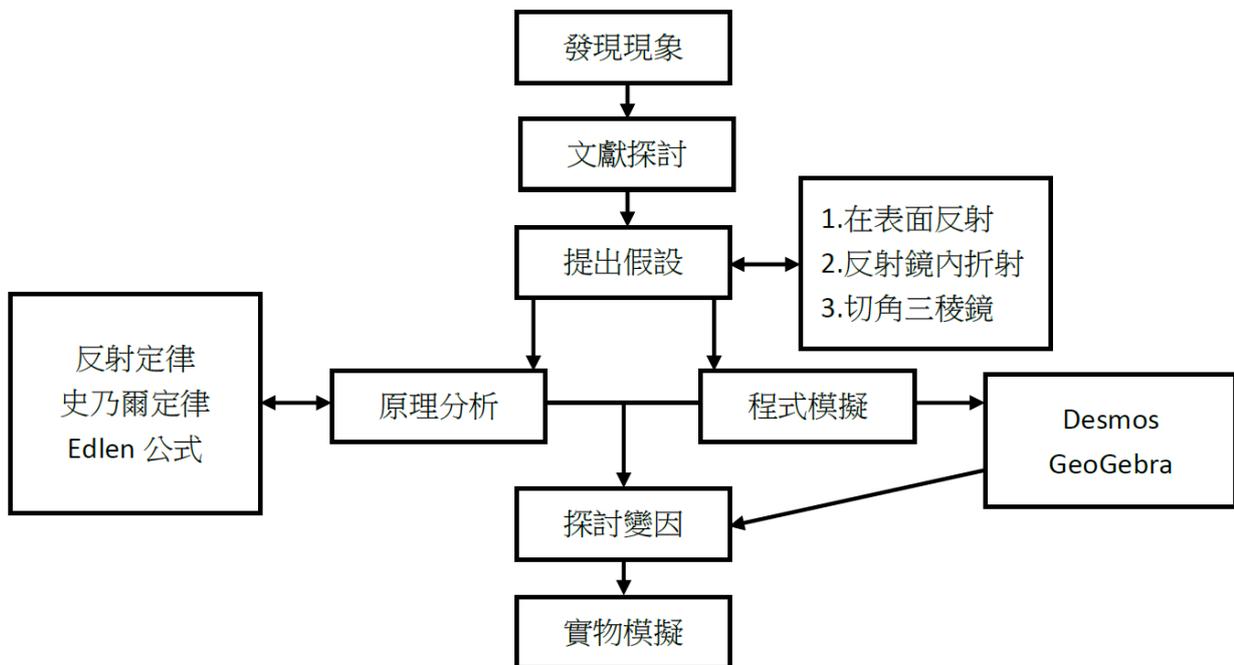


圖 3-1 研究架構

三、研究設備及器材

本組實驗準備之器材有：1. 筆記型電腦 2. Excel (version 1906) 3. 應用軟體 Desmos 和 GeoGebra 4. 玻璃 5. 木製墊板 6. 桌上型鐵製書架 7. Velcro 魔鬼氈 8. 瓦楞紙箱 9. 雷射光筆 10. 量尺 11. 量角器

肆、結果與討論

一、探討相關變因對色差距的影響

(一)室內外溫度和壓力對色差距的影響

由表 3-1 得知，大氣壓力(P)由 1010 百帕到 1024 百帕對折射率並沒有影響；另外溫度(t)由 20 度到 35 度對折射率的影響並不大。總體折射率則皆趨近於 1，因此，本研究推測溫度(t)與大氣壓力(P)對空氣的折射率並無直接影響。

表 3-1 溫度與壓力對折射率的不同數據表

t \ P	1010	1011	1012	1013	1014	~	1022	1023	1024
20	1+2.7*10 ⁻⁹	~	1+2.7*10 ⁻⁹	1+2.7*10 ⁻⁹	1+2.7*10 ⁻⁹				
21	1+2.7*10 ⁻⁹	~	1+2.7*10 ⁻⁹	1+2.7*10 ⁻⁹	1+2.7*10 ⁻⁹				
22	1+2.7*10 ⁻⁹	~	1+2.7*10 ⁻⁹	1+2.7*10 ⁻⁹	1+2.7*10 ⁻⁹				
§	§	§	§	§	§	~	§	§	§
31	1+2.6*10 ⁻⁹	~	1+2.6*10 ⁻⁹	1+2.6*10 ⁻⁹	1+2.6*10 ⁻⁹				
32	1+2.6*10 ⁻⁹	~	1+2.6*10 ⁻⁹	1+2.6*10 ⁻⁹	1+2.6*10 ⁻⁹				
33	1+2.6*10 ⁻⁹	~	1+2.6*10 ⁻⁹	1+2.6*10 ⁻⁹	1+2.6*10 ⁻⁹				
34	1+2.6*10 ⁻⁹	~	1+2.6*10 ⁻⁹	1+2.6*10 ⁻⁹	1+2.6*10 ⁻⁹				
35	1+2.6*10 ⁻⁹	~	1+2.6*10 ⁻⁹	1+2.6*10 ⁻⁹	1+2.6*10 ⁻⁹				

(二)陽光入射角對色差距的影響

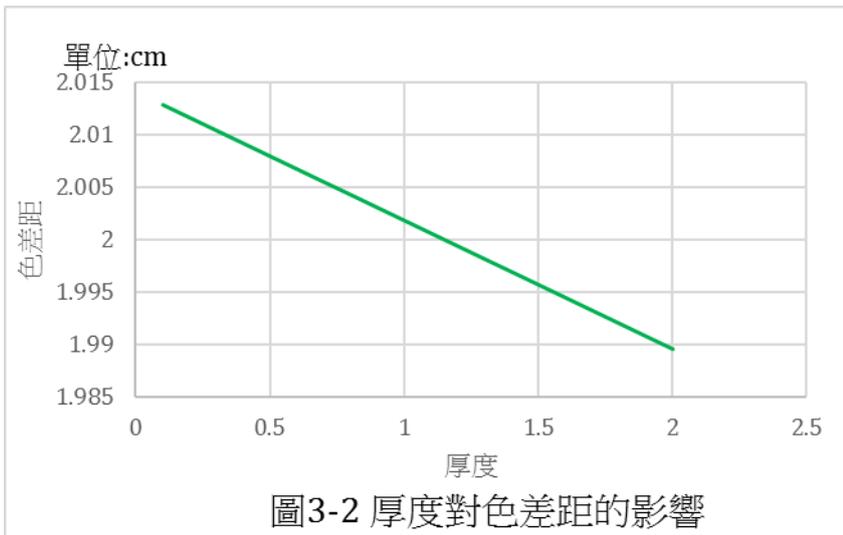
如果採光井的鏡筒在最後一次反射到地面的距離，約放大 5 至 10 倍，則色差距的範圍將落在 1 至 4 公分。因此由電腦模擬得到下列表 3-2 可得知，在折射率等於 1.002 時，入射角約落在 65 度到 80 度之間，其色差距最為合理；而在折射率等於 1.003 時，入射角約落在 60 度到 75 度之間，其色差距為最合理之值。

表 3-2 陽光入射角對色差距的不同數據表

θ	50	55	60	65	70	75	80	85
D(1.002)	0.4166	0.5262	0.6606	0.8411	1.2519	1.9018	3.1428	7.3045
D(1.003)	0.6235	0.7876	0.9888	1.2584	1.8713	2.8354	4.6515	10.4983

(三)玻璃厚度對色差距的影響

由下圖 3-2 知色差距並沒有隨厚度的增加而增加，反而是有些微的減少，但差距不大，僅有約 ±0.2mm 之差距，可推斷厚度對色差距並沒有太大的影響。



二、建立採光井形成彩虹時相關變因的數位化模型

(一) 探討部室內與室外折射率對色散的影響

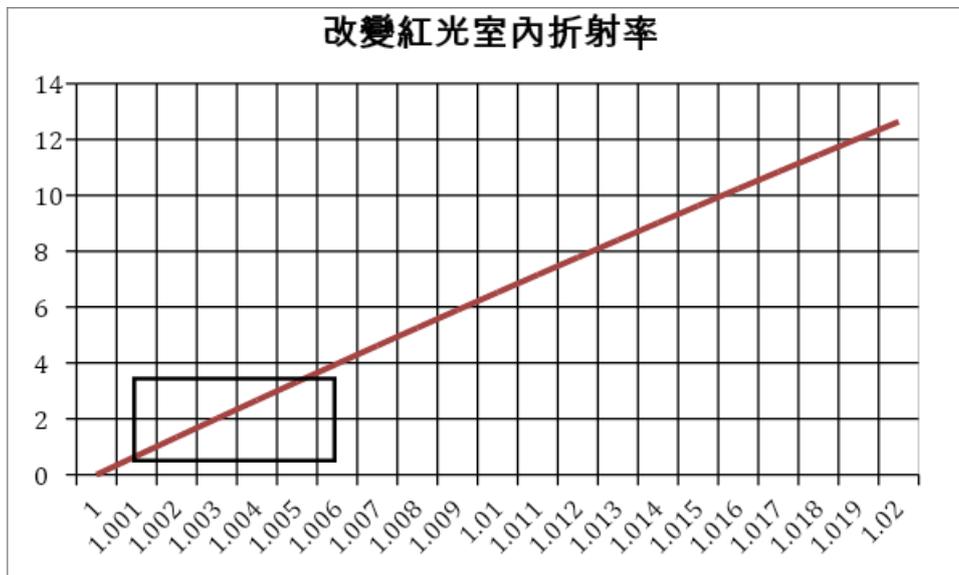
本實驗假設的控制變因有：

玻璃厚度=0.5cm；鏡筒高=100cm；鏡筒寬=20cm；入射角=72°；

入射光距離鏡子邊=12.3cm

1. 改變紅光於室內的折射率

$n=1.001\sim 1.020$



由上圖 3-3 得知紅、藍光的間距會隨著折射率的增加而產生一次函數之關係 $f_{Outsid_R}(x) \approx 645.726x - 645.655$ 。

而如果鏡筒最後一次反射至地面約放大 5 至 10 倍，則色差距的範圍將落在 1 至 4 公分，由此可得折射率範圍約在

$n_{Red,Inside} = 1.002 \sim 1.006$ 。如圖 3-4 至 3-10 所示。

$n=1.001 \rightarrow d=0.6736$ 放大後不足 10 公分 $\rightarrow \times$

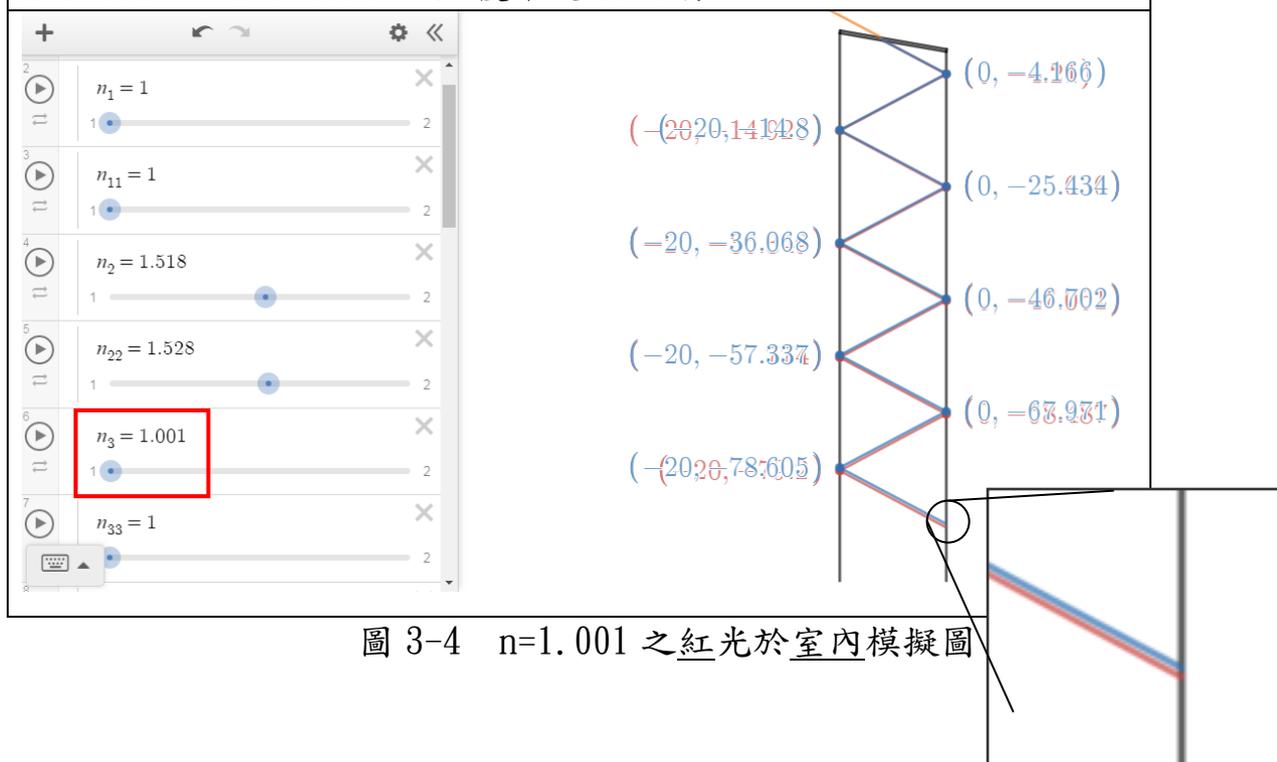


圖 3-4 $n=1.001$ 之紅光於室內模擬圖

$n=1.002 \rightarrow d=1.3434$

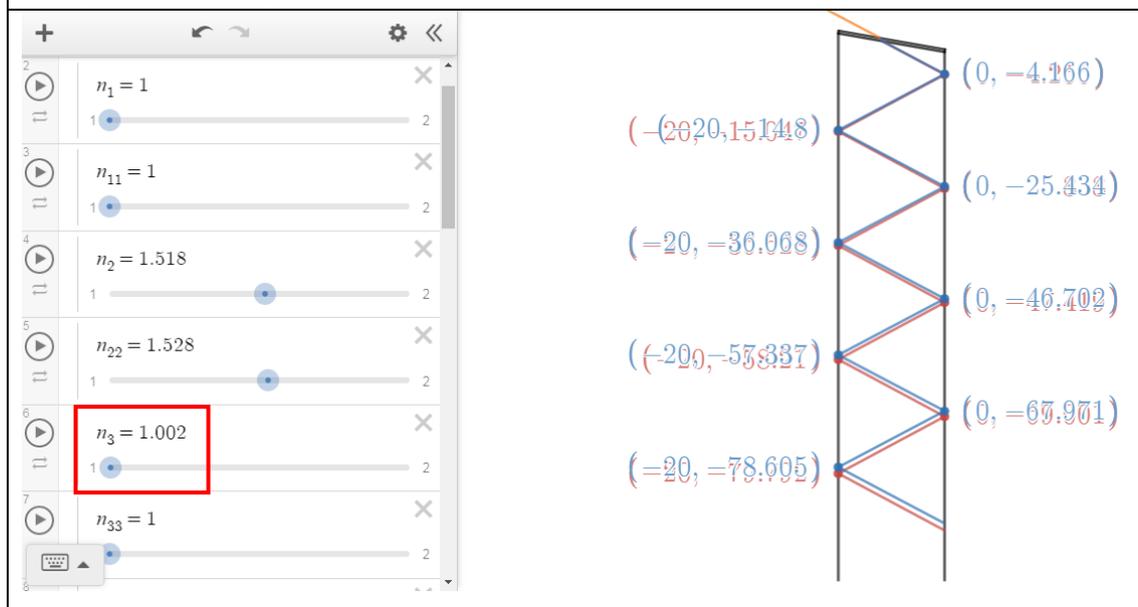


圖 3-5 $n=1.002$ 之紅光於室內模擬圖

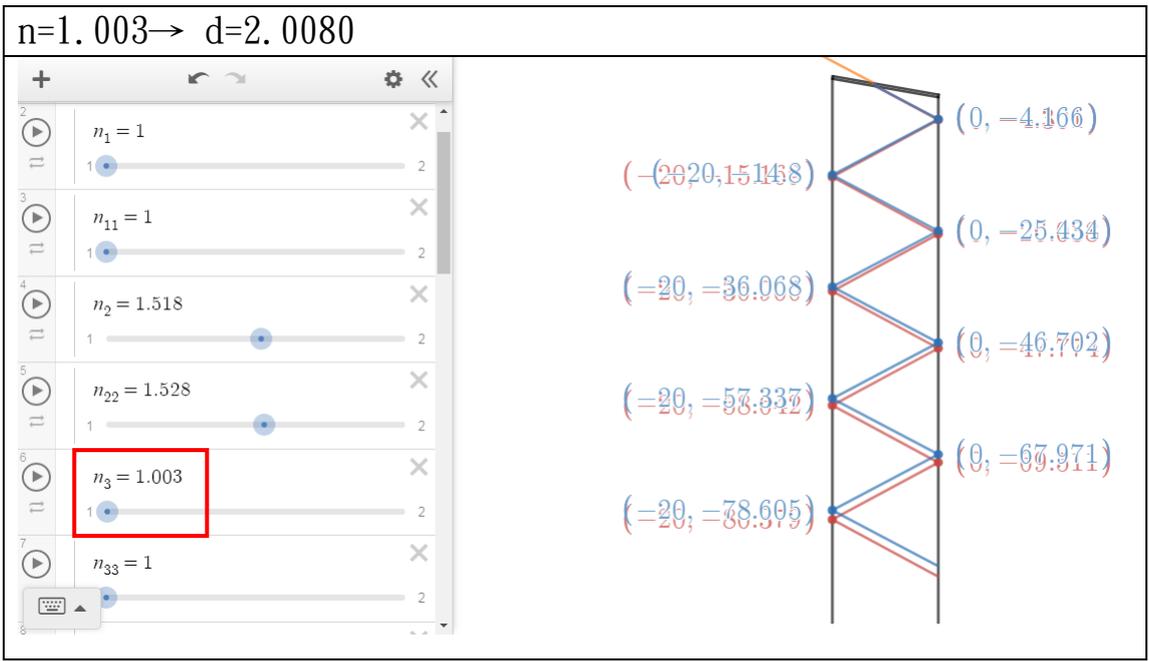


圖 3-6 $n=1.003$ 之紅光於室內模擬圖

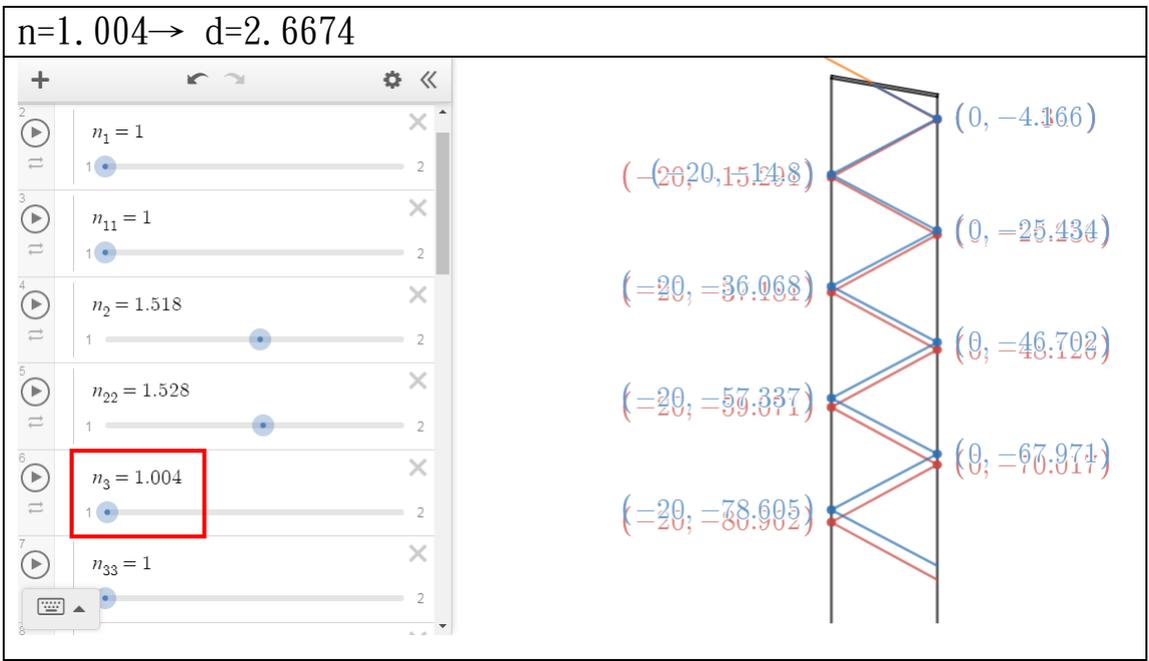


圖 3-7 $n=1.004$ 之紅光於室內模擬圖

$n=1.005 \rightarrow d=3.3220$

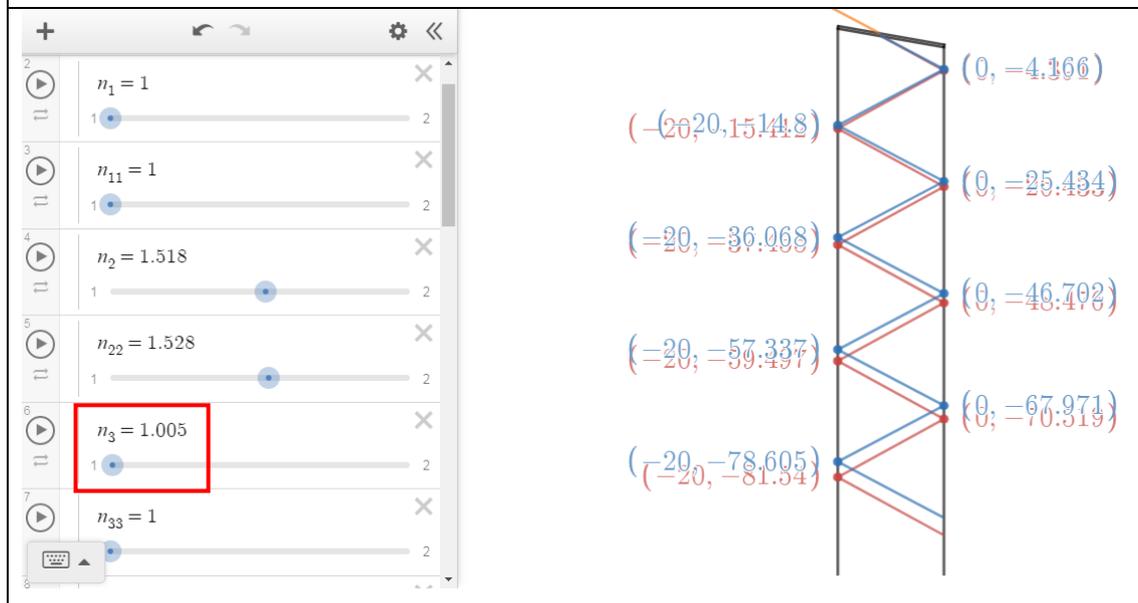


圖 3-8 $n=1.005$ 之紅光於室內模擬圖

$n=1.006 \rightarrow d=3.9718$

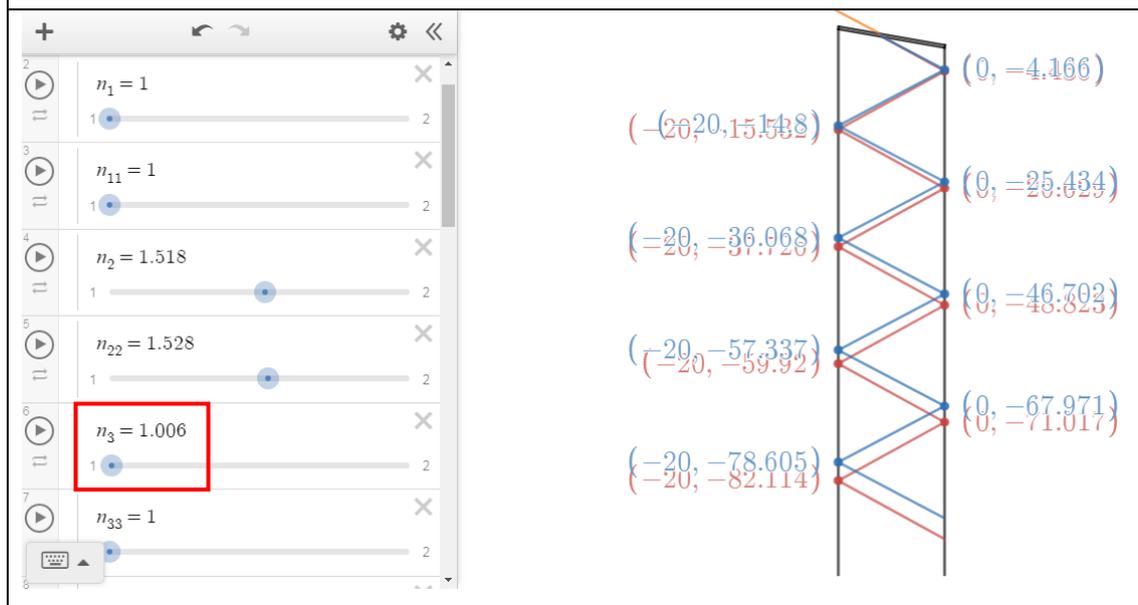


圖 3-9 $n=1.006$ 之紅光於室內模擬圖

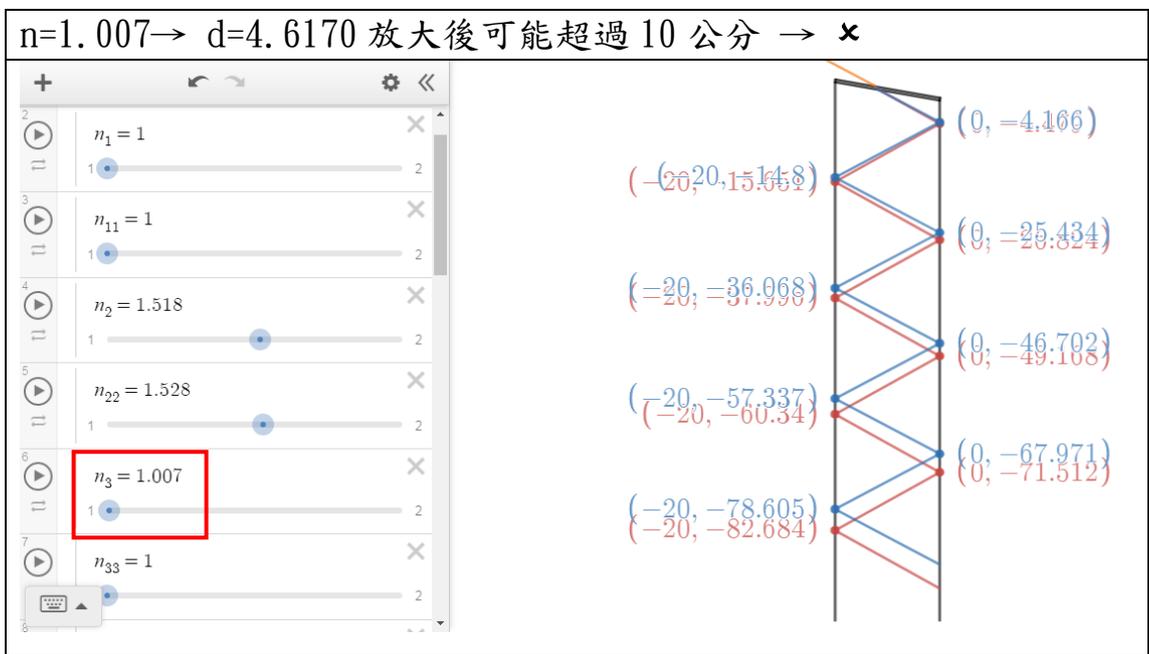


圖 3-10 $n=1.007$ 之紅光於室內模擬圖

2. 改變紅光於室外的折射率(1.001~1.020)

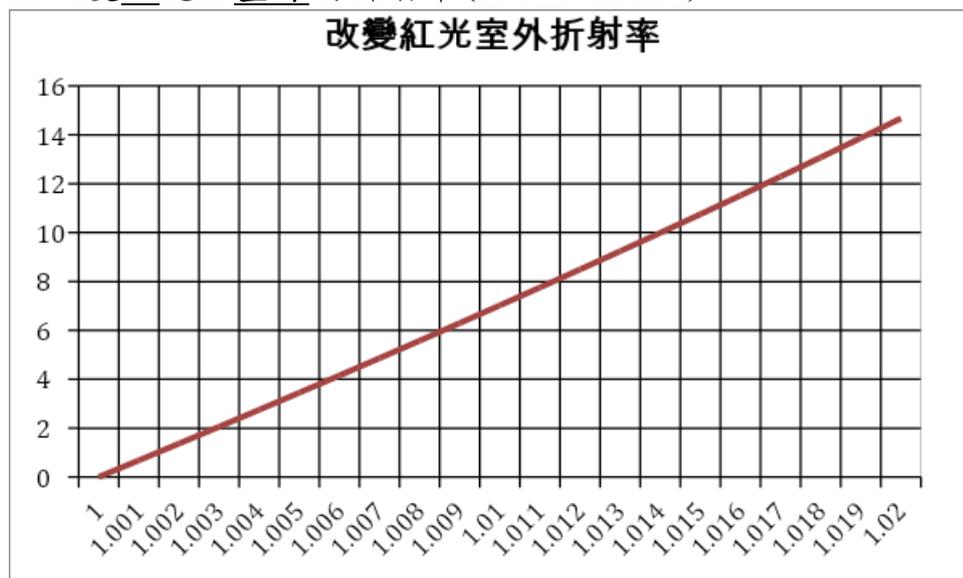


圖 3-11 紅光於室外的折射率圖

同理，折射率約在 $n_{Red,Outside} = 1.002 \sim 1.006$ 的範圍之間，也會在地面上產生約 5~10 公分的色差距。如圖 3-11 所示。

3. 改變藍光於室內的折射率(1.001~1.020)

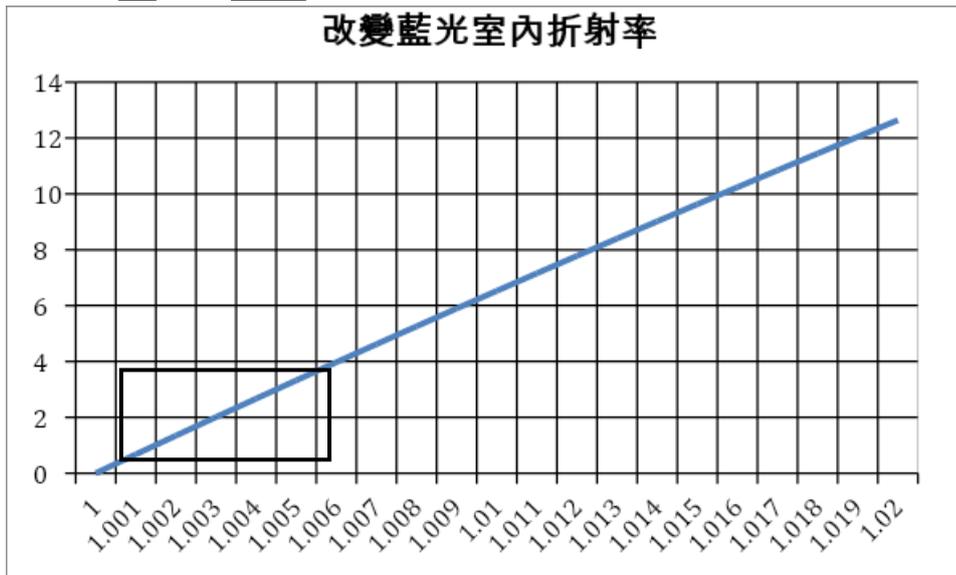


圖 3-12 藍光於室內的折射率圖

由圖 3-12 得知，藍光折射率範圍約落在 $n_{Blue,Inside} = 1.002 \sim 1.006$ 時，亦會在地面上產生約 5~10 公分的色差距，詳細資料如圖 3-13 至 3-19 所示。

$n=1.001 \rightarrow d=0.6766$ 放大後不足 10 公分 $\rightarrow \times$

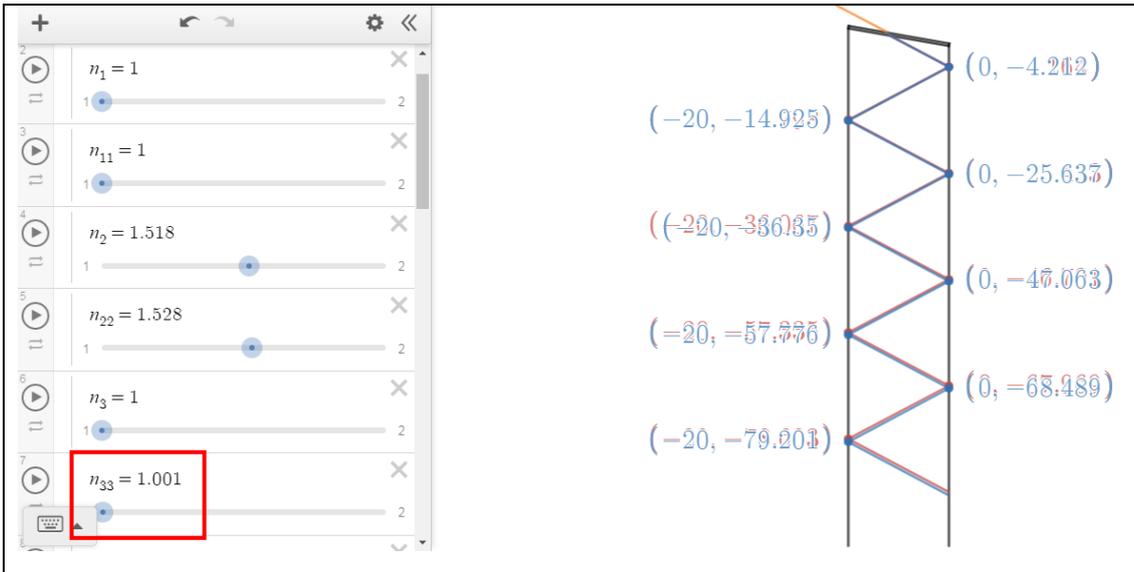


圖 3-13 $n=1.001$ 之藍光於室內模擬圖

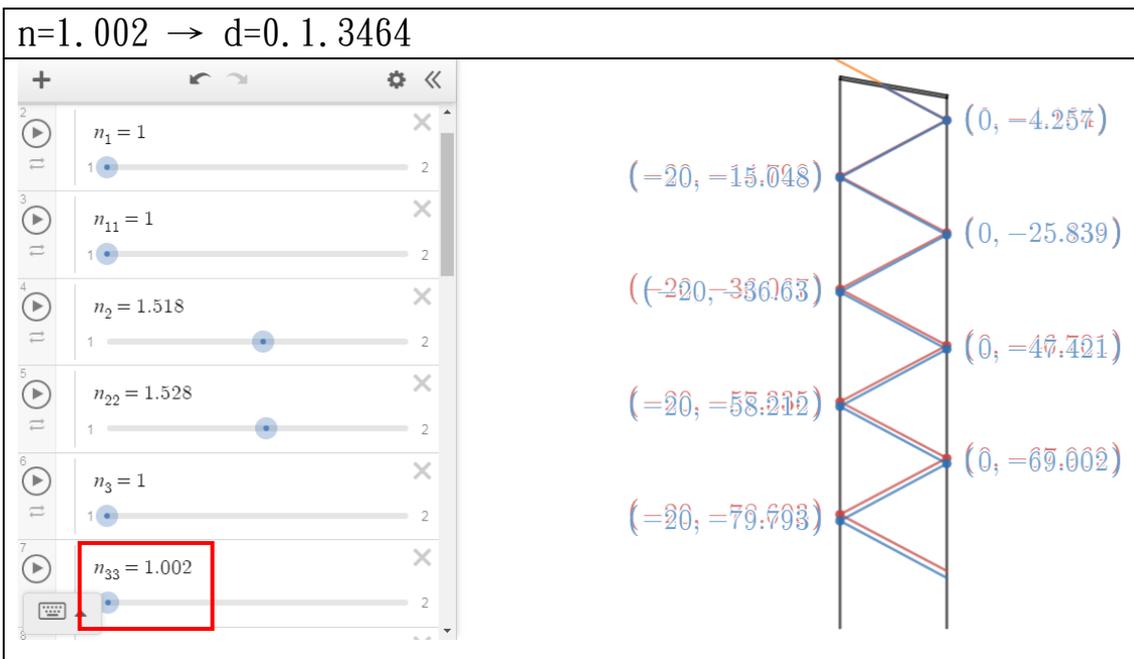


圖 3-14 $n=1.002$ 之藍光於室內模擬圖

$n=1.003 \rightarrow d=2.0110$

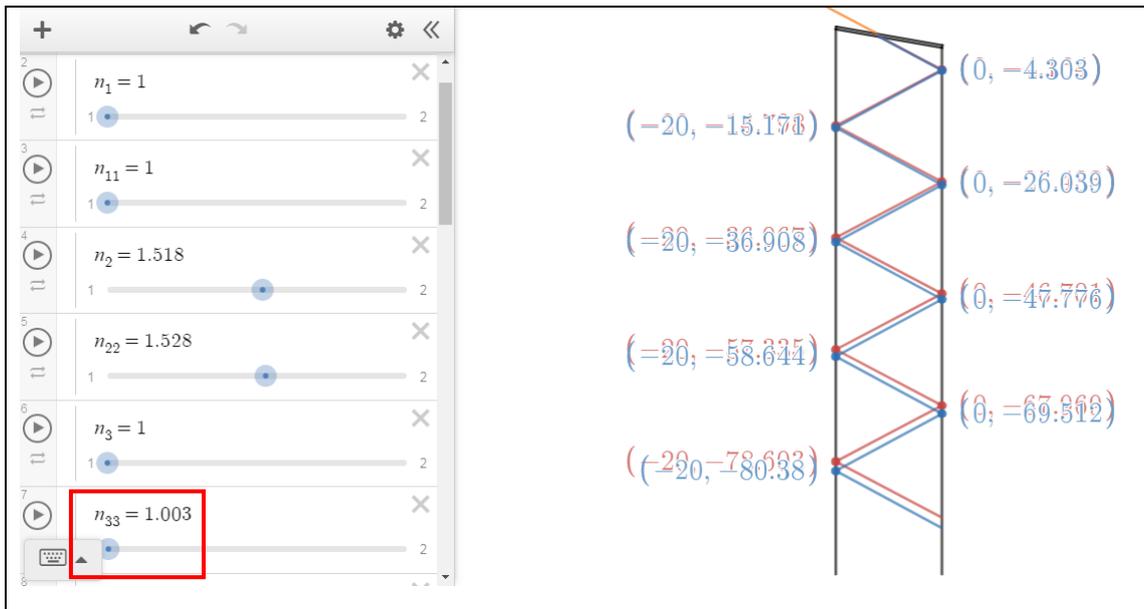


圖 3-15 $n=1.003$ 之藍光於室內模擬圖

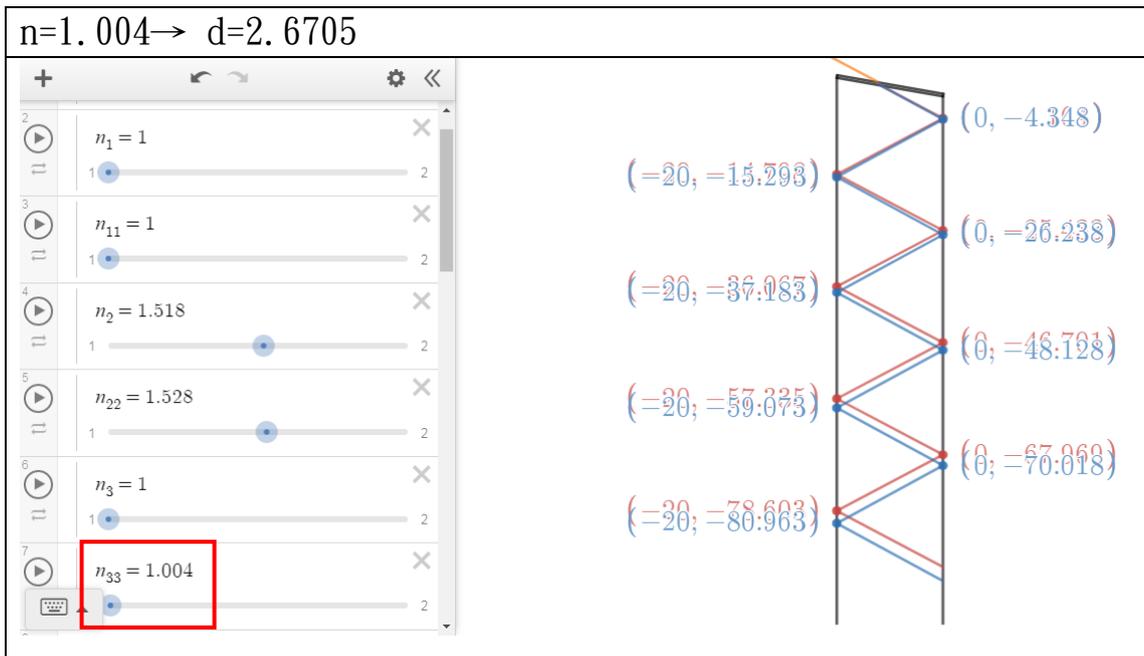


圖 3-16 $n=1.004$ 之藍光於室內模擬圖

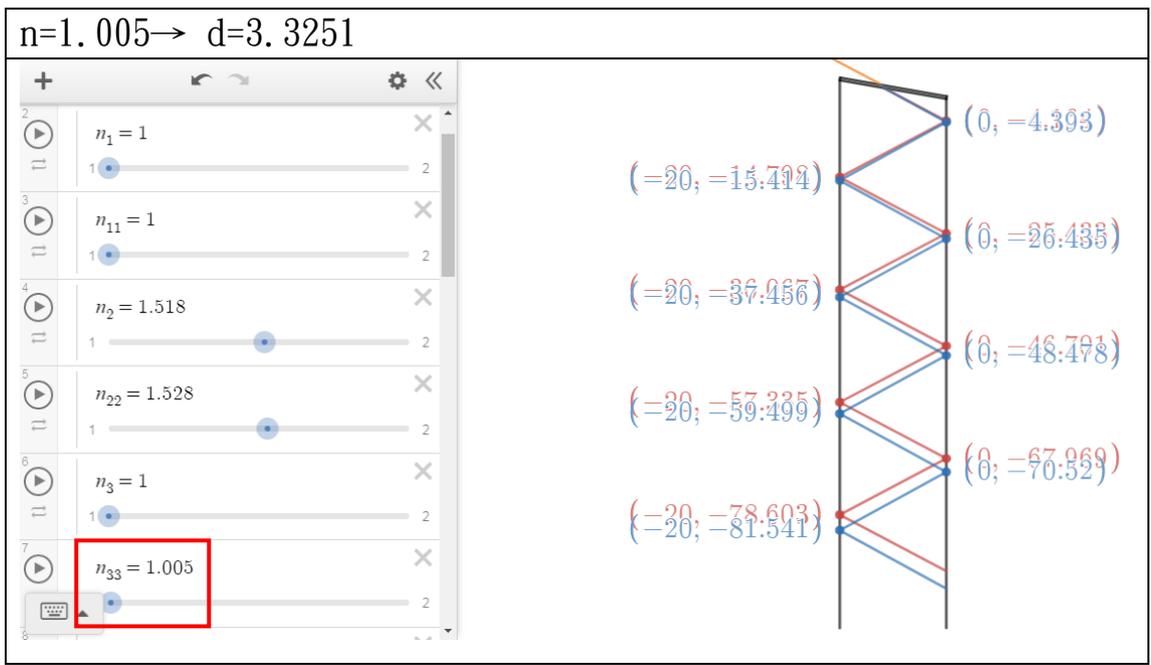


圖 3-17 $n=1.005$ 之藍光於室內模擬圖

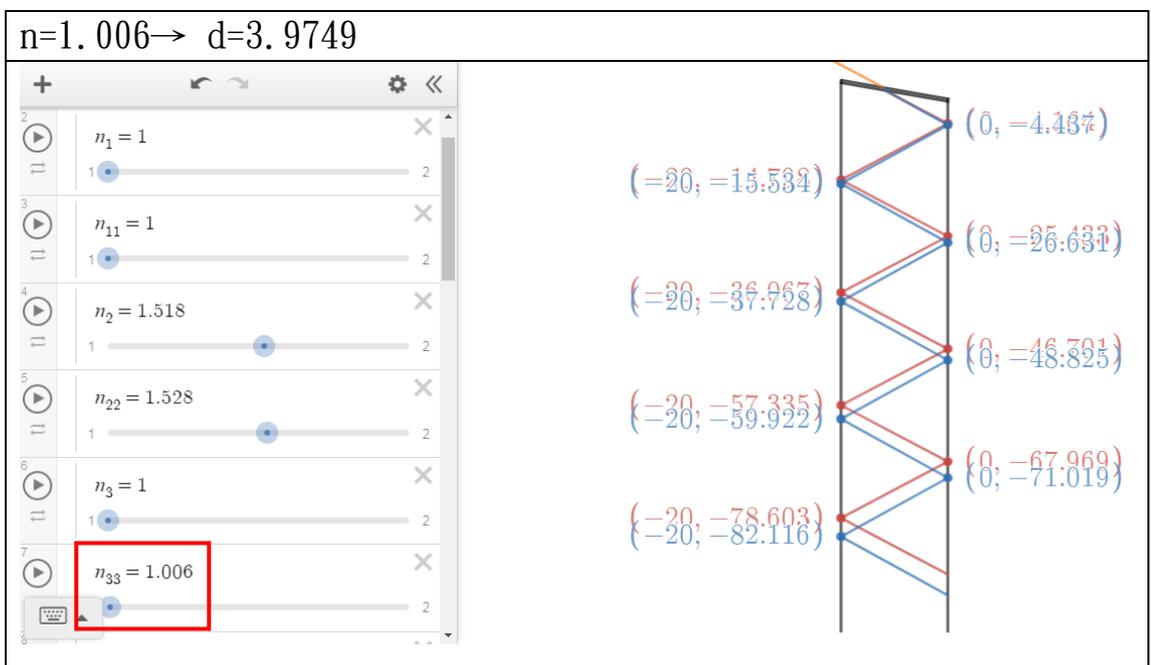


圖 3-18 $n=1.006$ 之藍光於室內模擬圖

$n=1.007 \rightarrow d=4.6201$ 放大後可能超過 10 公分 $\rightarrow \times$

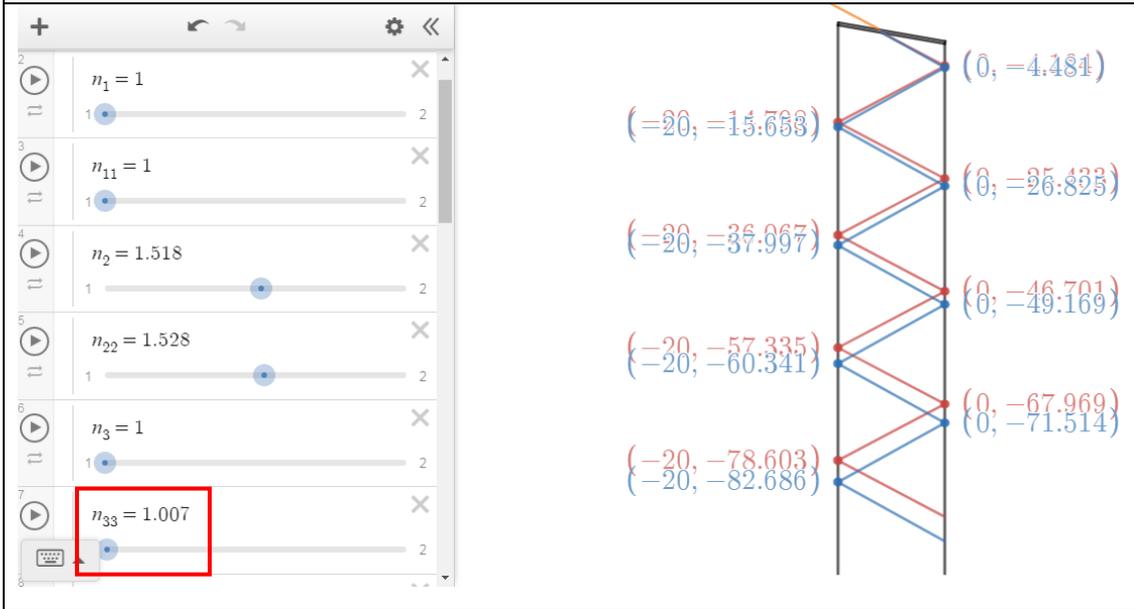


圖 3-19 $n=1.007$ 之藍光於室內模擬圖

4. 改變藍光於室外的折射率(1.001~1.020)

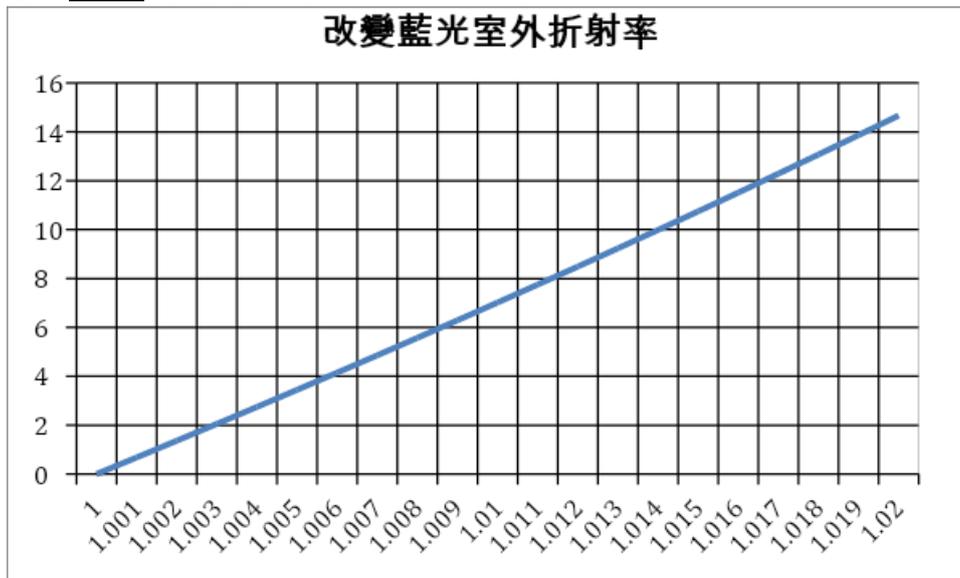


圖 3-20 藍光於室外的折射率圖

同理，折射率約在 $n_{Blue,Outside} = 1.002 \sim 1.006$ 的範圍之間，也會在地面上產生約 5~10 公分的色差距。如圖 3-20 所示。

三、探討玻璃厚度(水珠成虹、二折一反效應)對色散的影響

本研究根據 Snell' s Law 探討玻璃厚度，亦欲得知水珠成虹、二折一反之效應，其對色散的影響。證明如下：

符號定義：

θ 為第一次的入射角； α_B, α_R 為第一次的折射角也是第二次的入射角(反射定律)； θ_R, θ_B 則為第二次的折射角。假設空氣的折射率為 1， n_B, n_R 則分別為藍光和紅光在玻璃中的折射率。

第一次由空氣進入玻璃時

$$\begin{cases} \sin \theta = n_B \sin \alpha_B \\ \sin \theta = n_R \sin \alpha_R \end{cases}$$

經過反射後，第二次由玻璃到空氣時也同樣產生折射

$$\begin{aligned} \therefore & \begin{cases} \sin \theta_B = n_B \sin \alpha_B = \sin \theta \\ \sin \theta_R = n_R \sin \alpha_R = \sin \theta \end{cases} \\ \rightarrow & \theta_R = \theta = \theta_B \end{aligned}$$

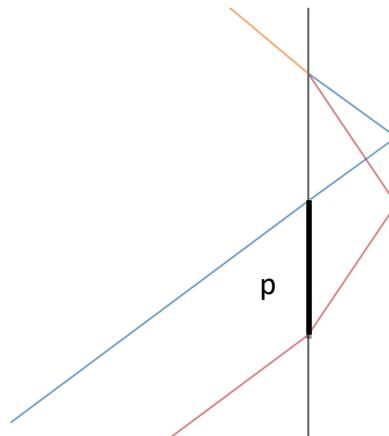


圖 3-21 二折一反效應折射圖

由上證明，我們認為玻璃間距並不會影響色光的色散，而玻璃厚度又不足以造成 5~10cm 的間距，因此我們認為這種情況應該不會發生。

本組另又證明計算出不同色光之間路程的間距(p)：

$$p = 2d(\tan \alpha_R - \tan \alpha_B)$$

$$\text{其中：} \alpha_R = \sin^{-1} \left(\frac{n_1 \sin \theta}{n_{2R}} \right) \quad , \quad \alpha_B = \sin^{-1} \left(\frac{n_1 \sin \theta}{n_{2B}} \right)$$

四、探討玻璃間隙(三稜鏡效應)對色散的影響

因為全反射的關係，光經過第二次折射後，入射角即超過臨界角而形成全反射，簡單來說就是光折射入鏡子之後就無法再折射離開鏡子了，如圖 3-22 三稜鏡效應模擬圖所示。

說明：

$$n_R = 1.518 \quad , \quad n_B = 1.528$$

$$\theta = 90 \rightarrow \alpha_B = 41.205 \rightarrow \beta_B \text{ 超過臨界角}$$

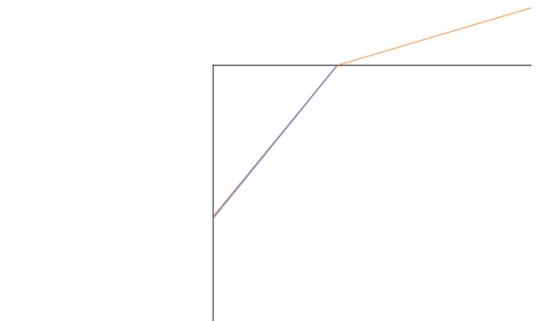


圖 3-22 三稜鏡效應模擬圖

伍、結論

根據電腦模擬的結果，我們得知下列幾點結果：

- 一、因室內和室外折射率不同造成的色散，較有可能產生彩虹。
- 二、不同色光在空氣中(近似真空)的折射率是一致的，但是在其他介質中，同一介質內的折射率，會因為光的頻率不同而有些微差距。
- 三、光在平行鏡面之內的反射雖然色散程度較小，但是經過類似光纖內的多次全反射後，對色差距有加成的效果。這是我們認為法院內出現彩虹因素之一。
- 四、平行鏡面接縫的切角(類三稜鏡的功效)，因為光在第二次折射時即達到臨界角而無法折射出鏡外。所以不會是形成彩虹的原因。
- 五、當陽光入射角在 65° ~ 75° 左右時，其產生的色差距值較貼近實際情況。
- 六、玻璃厚度對色差距的影響抑是極小，只有 $\pm 2\text{mm}$ ，可忽略不計。
- 七、紅光和藍光折射率介於 1.002-1.006 之間，色差距出現較合理之數值。
- 八、我們先以電腦程式來模擬光線在建築物中的路徑關係，未來展望是建立一個物理條件相同的環境，繼續進行科學性的研究以驗證電腦程式模擬的結果是否正確。

陸、參考文獻

1. 孙琳琳、张立(2010)。基於單片機測量空氣折射率。現代電子技術，第 22 期，P166-171。
2. 維基百科(2019 年 3 月 24 日)。司乃耳定律【維基百科】。取自：
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%96%AF%E6%B6%85%E5%B0%94%E5%AE%9A%E5%BE%8B>
3. 維基百科(2019 年 7 月 21 日)。全內反射【維基百科】。取自：
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%85%A8%E5%85%A7%E5%8F%8D%E5%B0%84>
4. 張郁蕙、陳盈瑀、黃若慈、潘若卉(2005)。消失的彩虹頻道——解碼 42^0 之謎(編號 040111)。高雄市：高雄女子高級中學
5. 揭由志(佚年)。道耳吞分壓定律。臺中市：修平科技大學