臺南市 107 年度國中學生獨立研究競賽作品(封面)

作品名稱： 一條線

編號：			（由承辦單位統一填寫）

作品名稱:一條線

摘要

$\boxed{\text{主題一:}}$證明已知一條線$\overline{AB}$的長度，在$\overline{AB}$中任取 C、D、…多點，分別以$\overline{AC}$、$\overline{CD}$、$\overline{BD}$…為直徑作半圓，並以【乘法分配律的逆運算】提出相同係數，這些紅色曲線總和可轉化為以$\overline{AB}$為直徑的半徑圓弧長$0.5\overline{AB}\pi$。接著討論還有哪些圖形可以轉化用已知$\overline{AB}$來表示總和，以及是否可用【圖解法】(翻轉、平移、交叉)切割平移再組合後之圖形也可符合?

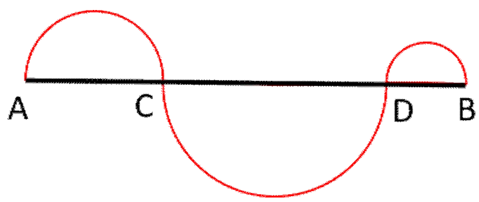
$\boxed{\text{主題二:}}$已知一條線$\overline{AB}$的長度，以$\overline{AB}$為斜邊做直角三角形，並在直角三角形三邊向外做正方形，再提出相同係數，則三個正方形的面積總和=$2\overline{AB}^2$。討論並論證還有哪些圖形可以用已知線段$\overline{AB}$的長度來表示所有圖形的面積總和，以及是否【可圖解分割再組合】後也可符合?最後再延伸至體積以及畢氏定理樹也能用已知$\overline{AB}$的長度來表示所有圖形的體積或是面積總和?

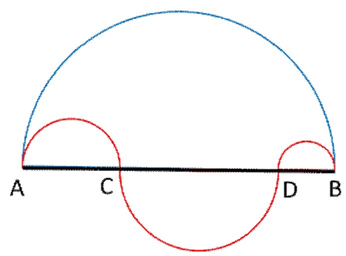
壹、研究動機及目的

研究動機：

數學培訓課的時候老師出了這樣的題目給我們小組討論:

只知道線段$\overline{AB}$的長度，在$\overline{AB}$中任取 C、D 兩點，分別以$\overline{AC}$、$\overline{CD}$、$\overline{BD}$為直徑作半圓，求紅色曲線總長?





C、D 的點任選總長一樣嗎? 如果從中再細分成多個半圓，總長一樣嗎？

我和我的組員討論之後，發現不論如何分割答案都一樣。總長都等於以 $\overline{AB}$ 為直徑的半圓弧長，於是我們開始想還有哪些圖形組合可以只知道一線段的長度就可以推論其總周長或是總面積，便和同學開始進行研究。

研究目的：

(一):已知 $\overline{AB}$ 的長度，在 $\overline{AB}$ 中任取 C.D…點，分別以 $\overline{AC}$.$\overline{CD}$.$\overline{BD}$…為直徑做半圓，這些半圓弧長可以利用乘法分配律的逆運算以及圖解法(其中包含運用切割及平移該圖形)轉化為以 $\overline{AB}$ 為直徑的半圓弧長。並討論還有哪些圖形可以轉化並用 $\overline{AB}$ 長度表示總長。

(二):已知 $\overline{AB}$ 長度並以 $\overline{AB}$ 為斜邊做直角三角形，並在直角三角形三邊堆疊正方形，透過計算發現三個正方形面積和= $\overline{AB}^2$ 的兩倍。討論是否還有其餘圖形可滿足此情形。並試用 $\overline{AB}$ 表示三個圖形面積總和。後再透過**圖解法**將圖形分解後組合，探究能否以 $\overline{AB}$ 表示其面積。

貳、文獻探討

一、 $\boxed{\text{畢氏定理:}}$給定一個直角三角形 $\triangle ABC$，若邊長分別是 a，b，c，其中 $a < b < c$，則必定滿足關係式 $c^2 = a^2 + b^2$。或換個說法：直角三角形中，直角所對的斜邊上的正方形面積，等於直角兩邊上的正方形面積的和。是的，這就是大家耳熟能詳的畢氏定理，一個幾何學上基本且漂亮的定理。同時，它的逆定理

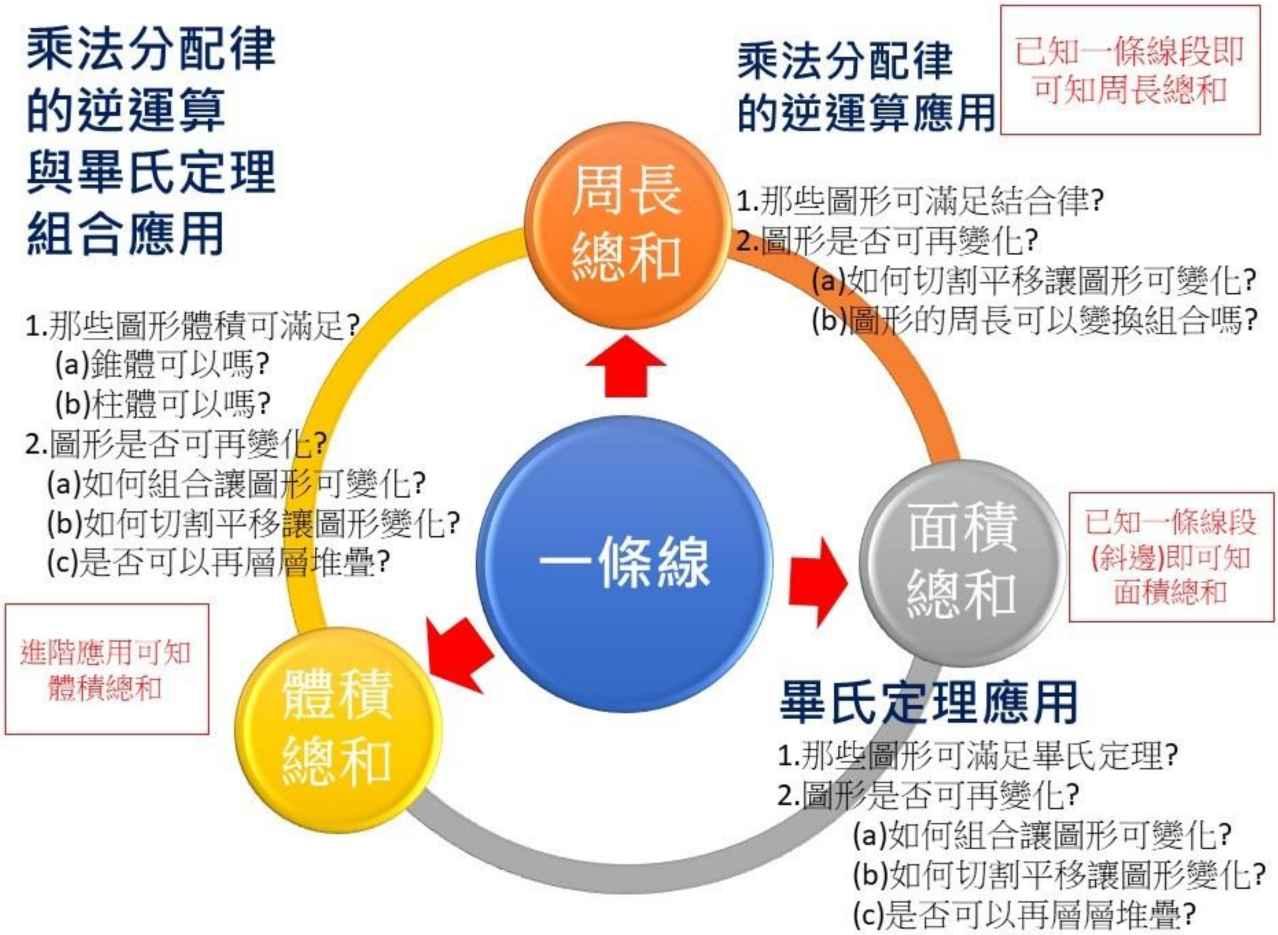
也成立，也就是說，滿足上述關係的 3 數 a，b，c，必定形成一直角三角形。

二、能由乘法分配律的逆運算瞭解提公因數並運用乘法交換律與乘法結合律透過圖解法製成許多圖形變換。

三、透過圖解法與面積的計算延伸並應用畢氏定理。

參、研究過程與方法

一、研究架構



二、周長總和研究

(一)利用乘法分配律逆運算探究周長總和

1.半圓路徑

已知線段 $\overline{AB}$ 的長度，在 $\overline{AB}$ 中任取 C、D、…多點，分別以 $\overline{AC}$ 、 $\overline{CD}$、 $\overline{BD}$……為直徑作半圓，試用 $\overline{AB}$ 表示紅色曲線的總長。

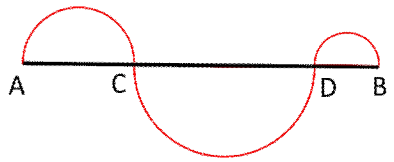
紅色曲線總長=

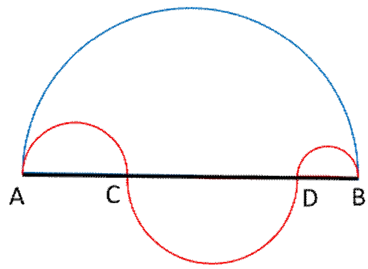
$$\frac{\overline{AC}}{2}\pi+\frac{\overline{CD}}{2}\pi+\frac{\overline{DB}}{2}\pi$$

$$=\frac{1}{2}\pi(\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{DB})$$

$$=\frac{1}{2}\pi\overline{AB}$$

= 藍色曲線總長





2.半圓路徑說明

已知線段 $\overline{AB}$ 的長度，在 $\overline{AB}$ 中任取 C、D、…多點，分別以 $\overline{AC}$ 、 $\overline{CD}$、 $\overline{BD}$……為直徑作半圓，試用 $\overline{AB}$ 表示紅色曲線的總長。

紅色曲線總長=

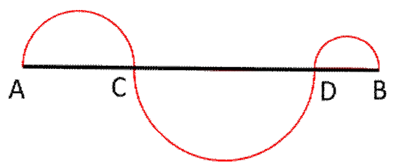
$$\frac{\overline{AC}}{2}\pi+\frac{\overline{CD}}{2}\pi+\frac{\overline{DB}}{2}\pi$$

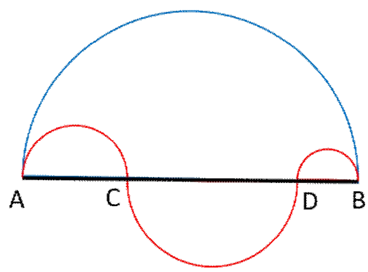
$$=\frac{1}{2}\pi\boxed{(\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{DB})}$$

$$=\frac{1}{2}\pi\boxed{\overline{AB}}$$

= 藍色曲線總長

1.可應用的圖形需有相同係數可完全提出來只剩下線段(如紅圈所示)
2.每個被分割的線段不一定需要均分，只要加總起來可為原線段總長即可(如藍框所示)





3.正三角形路徑

已知線段 $\overline{AF}$ 的長度，在 $\overline{AF}$ 中任取 B、C、D、…..多點，分別以 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CD}$ 、$\overline{DE}$ 、$\overline{EF}$ ……為底邊作正三角形，試用 $\overline{AF}$ 表示藍色線段的總長。

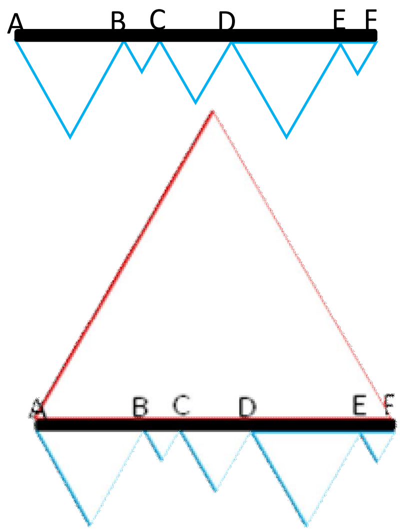
藍色線段總長=

$2\overline{AB}+2\overline{BC}+2\overline{CD}+2\overline{DE}+2\overline{EF}$

$=2\left(\boxed{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}}\right)$

$=2\boxed{\overline{AF}}$

= 紅色線段總長

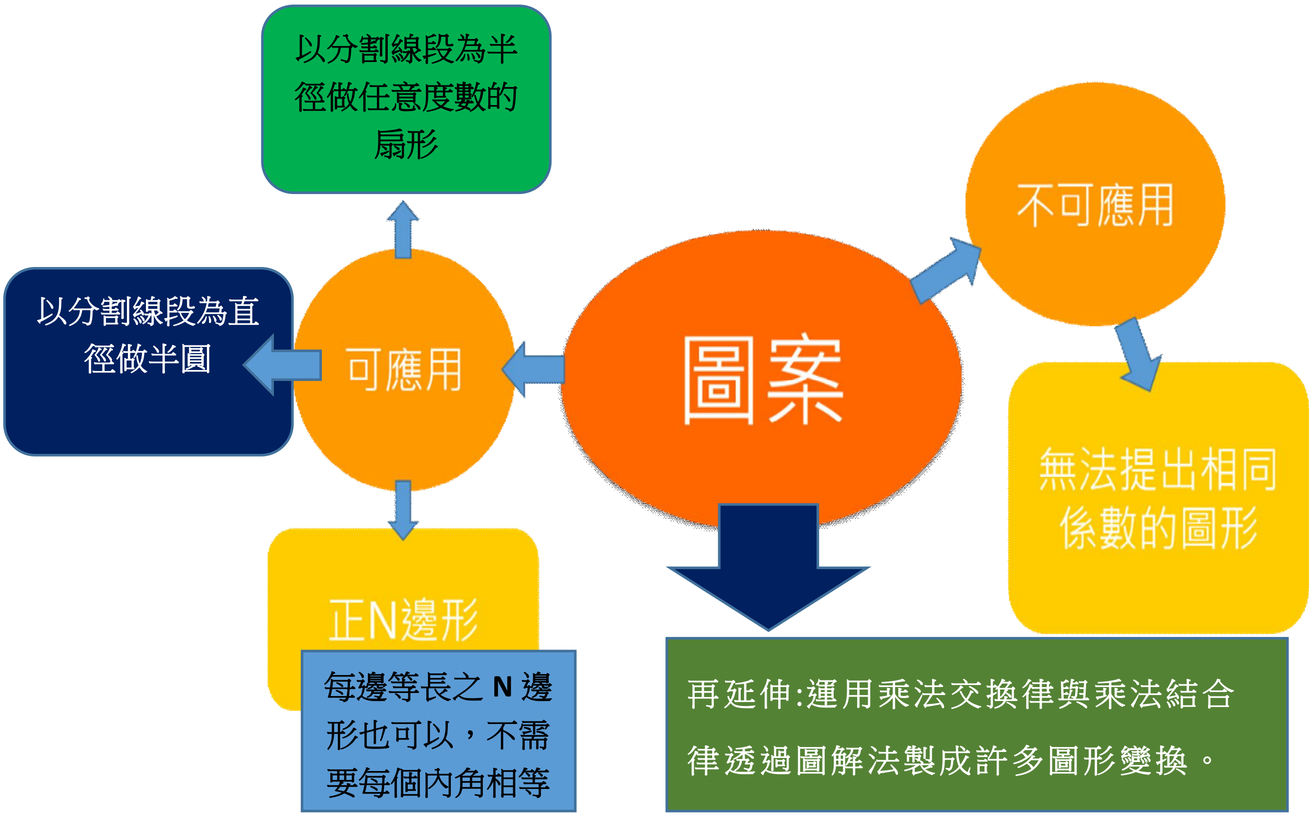


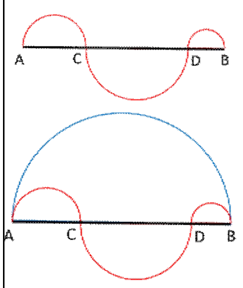
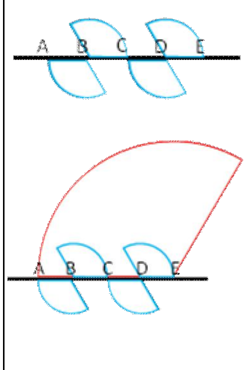
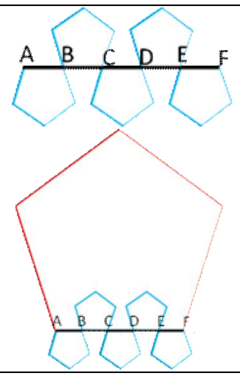
4.小結論

由以上圖形計算結果可得知，要符合紅色線段總長=藍色線段總長，須達成以下 2 點：

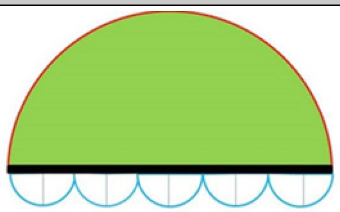
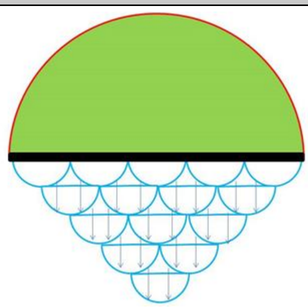
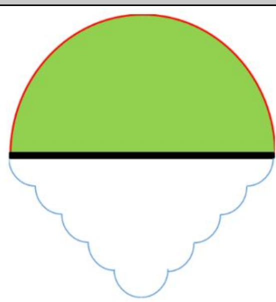
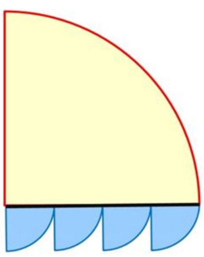
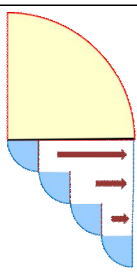
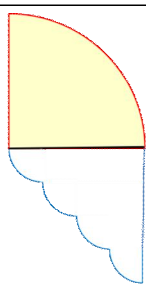
1.可應用的圖形需可提出相同係數，只剩下線段(如紅圈所示)

2.每個被分割的線段不一定需均分，只要總和為原本線段長即可(如籃框所示)

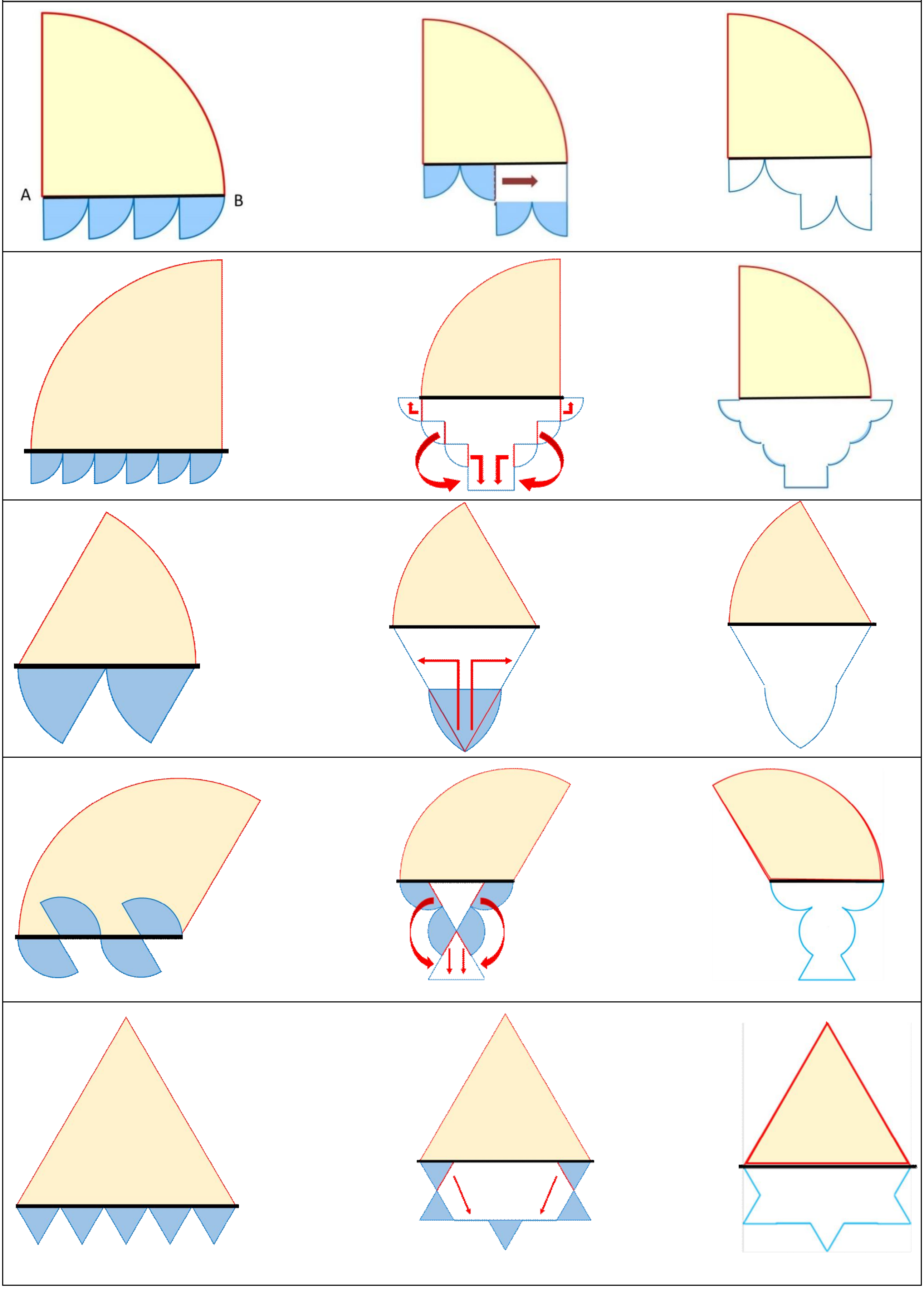


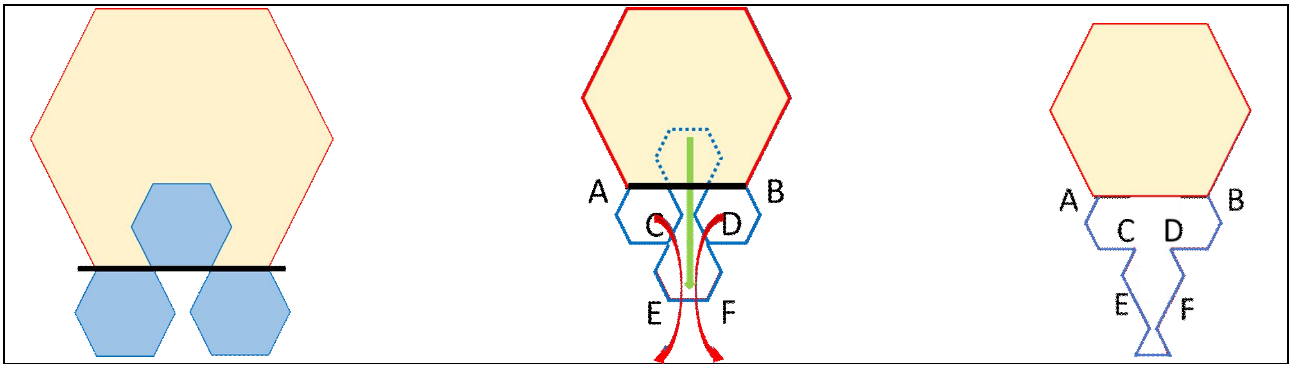
可應用圖形	可提出係數	圖形範例	證明
180 度之扇形切割 $(\frac{1}{2}$ 圓$)$	180 度的扇形則可提出共同係數 $(\frac{1}{2}\pi)$		$\frac{\overline{AC}}{2}\pi+\frac{\overline{CD}}{2}\pi+\frac{\overline{DB}}{2}\pi$ $=\frac{\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{DB}}{2}\pi$ $=\frac{\overline{AB}}{2}\pi$ $=$藍色曲線總長
同度數之扇形切割 $(\frac{1}{4}$ 圓、$\frac{1}{3}$ 圓...$)$ (不含 $\frac{1}{2}$ 圓)	m 度的扇形則可提出共同係數 $(\frac{2m}{360})\pi$ +扇形之半徑長		$2m\frac{\overline{AB}}{360}\pi+2m\frac{\overline{BC}}{360}\pi+2m\frac{\overline{CD}}{360}\pi+2m\frac{\overline{DE}}{360}\pi$ $+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}$ $=2m(\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}}{360})\pi$ $+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}$ $=2m(\frac{\overline{AE}}{360})\pi+\overline{AE}$ $=$紅色曲線總長
邊長相同之多邊形 (不一定需正多邊形)	n 邊形則可提出共同係數 (n-1)		$(n-1)\overline{AB}+(n-1)\overline{BC}+(n-1)\overline{CD}+......+(n-1)\overline{EF}$ $=(n-1)(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+......+\overline{EF})$ $=(n-1)\overline{AF}$ $=$紅色線段總長

(二)圖解法探究周長總和

等　分　/　平　行　平　移		
		
		

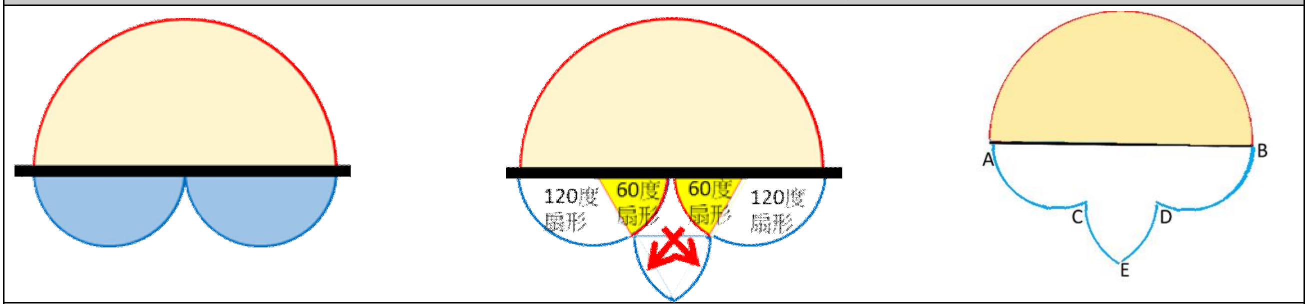
等 分 / 翻 轉 平 移

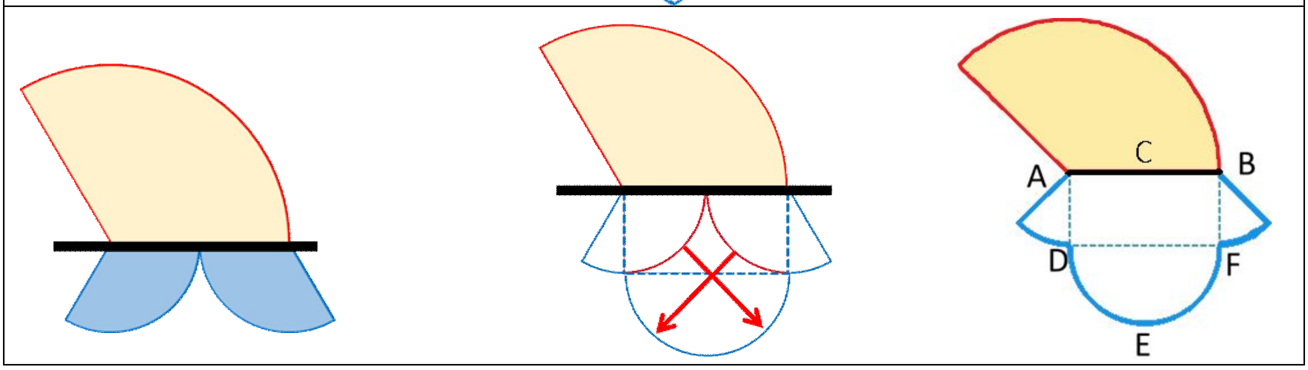




其餘圖形請見附件

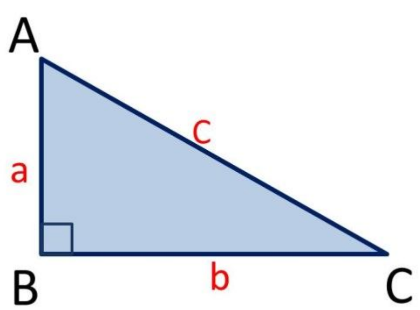
對　稱　分　割/ 交　叉　平　移

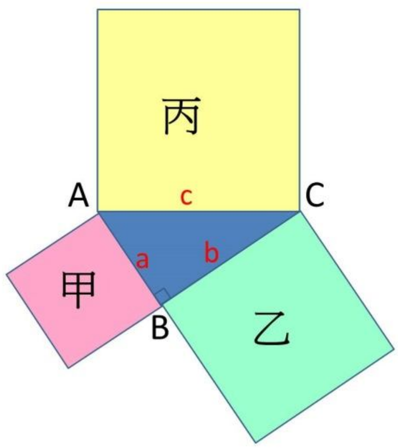




(三)、畢氏定理延伸應用

△ABC 為直角三角形，∠B=90 度。三邊的邊長 $\overline{AB}$=a，$\overline{BC}$=b，$\overline{AC}$=c (說明如下圖)





以△ABC 的三個邊長為底邊分別做三個正方形，二股為邊作的正方形為甲、乙，

斜邊為邊所做的正方形為丙。說明如圖(二)。

甲面積$(a^2)+$乙面積$(b^2)=$丙面積(C^2)

若已知斜邊長度 c，則三個正方形的面積總和為 $2C^2$

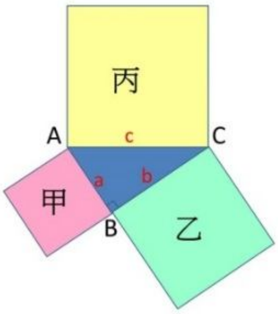
△ABC 為直角三角形，∠B=90 度。三邊的邊長 $\overline{AB}=a$ ， $\overline{BC}=b$ $\overline{AC}=c$

以下研究分別以△ABC 的三個邊長為底邊分別做三個半圓、正三角形、正多邊形、組合圖形…，二股為邊所做的圖形為甲、乙，斜邊為邊所做的圖形為丙。

已知斜邊長度 c 則甲、乙、丙三圖形之面積和如何用 C 表示

發想：可以只知道一條線就可以求面積和嗎?

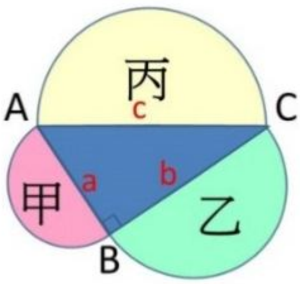
國中曾學過→



甲+乙=丙

甲+乙+丙=2 丙=$2C^2$

結果發現→



半圓、正三角形也可以符合甲+乙=丙

1.半圓

<table>
<tr><td colspan="2">已知直角△ABC 斜邊長度=c，分別以△ABC 的三個邊長為直徑分別做三個半圓。二股為直徑所做的圖形為甲、乙，斜邊為直徑所做的圖形為丙。
已知斜邊 c，求甲、乙、丙三圖形之面積和?</td></tr>
<tr><td>

$甲+乙=(\frac{a}{2})^2\bullet\frac{1}{2}\pi+(\frac{b}{2})^2\bullet\frac{1}{2}\pi$

$=\frac{a^2}{4}\bullet\frac{1}{2}\pi+\frac{b^2}{4}\bullet\frac{1}{2}\pi$

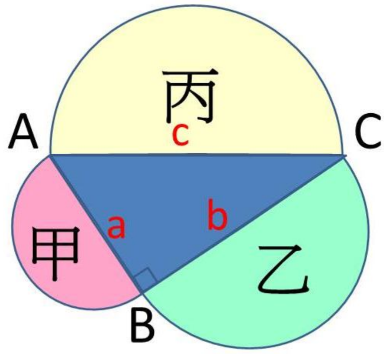
$=\frac{a^2}{8}\pi+\frac{b^2}{8}\pi$

$=\frac{1}{8}\pi\bullet(a^2+b^2)$

$=\frac{1}{8}\pi\bullet c^2=丙$

則三個半圓的面積總和$=\frac{1}{4}\pi\bullet c^2$

</td><td>



</td></tr>
</table>

2. 正三角形

<table>
<tr><td colspan="2">已知直角△ABC 斜邊長度=c，分別以△ABC 的三個邊長為底邊分別做三個正三角形。二股為邊所做的圖形為甲、乙，斜邊為邊所做的圖形為丙。
已知斜邊 c，求甲、乙、丙三圖形之面積和?</td></tr>
<tr><td>

$甲+乙=2\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{a}{2}\sqrt{\left[(a)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]}+2\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{b}{2}\sqrt{\left[(b)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]}$

$=\frac{a}{2}\bullet\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{b}{2}\bullet\frac{\sqrt{3}b}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}+\frac{\sqrt{3}b^2}{4}$

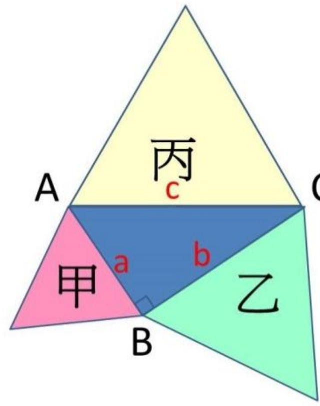
$=\sqrt{3}\,\frac{a^2+b^2}{4}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$

$=丙$

則三個正三角形的面積總和$=\frac{\sqrt{3}}{2}c^2$

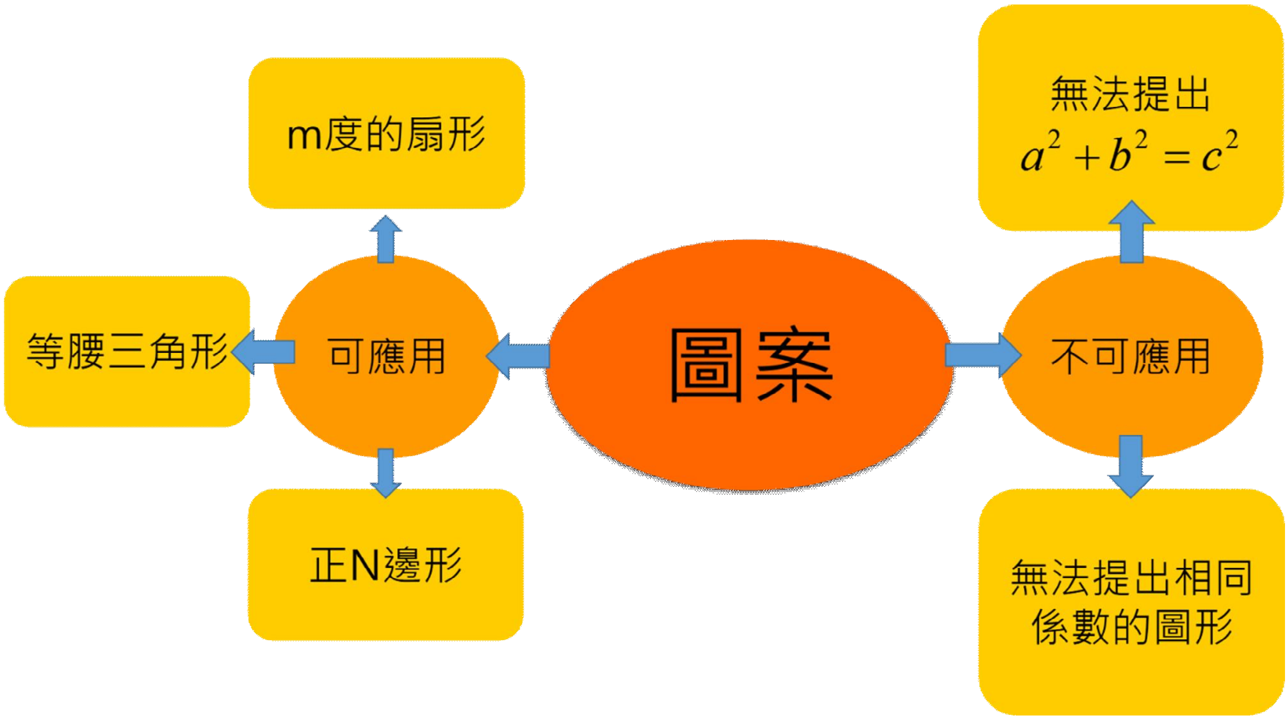
</td><td>

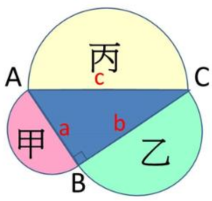
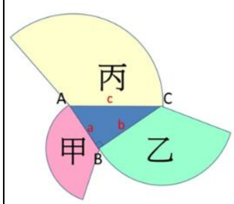


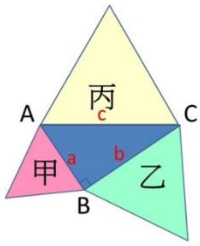
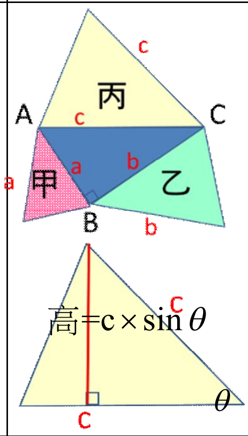
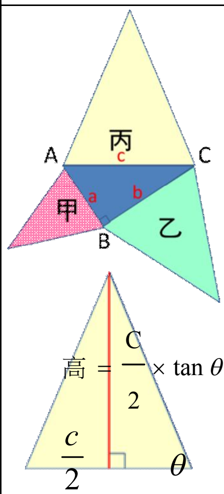
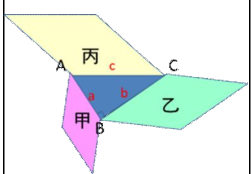
</td></tr>
</table>

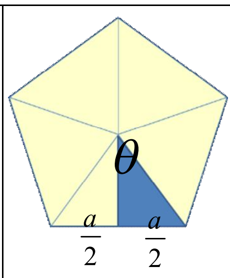
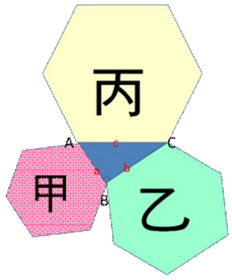
3. 小結論

由以上圖形計算結果可得知，要符合甲+乙=丙，須達成以下 1 點： 1.可應用的圖形需可提出相同係數，只剩下(a^2+b^2) (如紅圈所示) 則甲+乙+丙=2×(相同係數)×(a^2+b^2)= 2×(相同係數)×(c^2)



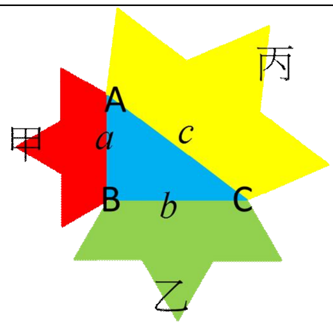
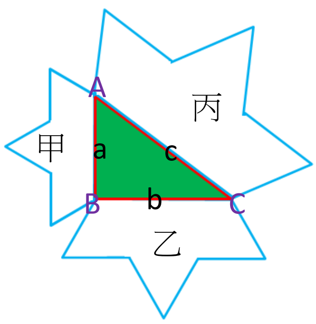
可應用圖形	可提出係數	圖形範例	證明
以 $\overline{AB}$ 為直徑的半圓	半圓則可提出共同係數 $\frac{1}{8}\pi$		甲+乙 $=(\frac{a}{2})^2 \bullet \frac{1}{2}\pi+(\frac{b}{2})^2 \bullet \frac{1}{2}\pi$ $=\frac{a^2}{4}\bullet\frac{1}{2}\pi+\frac{b^2}{4}\bullet\frac{1}{2}\pi$ $=\frac{a^2}{8}\pi+\frac{b^2}{8}\pi$ $=\frac{1}{8}\pi\bullet(a^2+b^2)$ $=\frac{1}{8}\pi\bullet c^2=$ 丙 則3個半圓的面積總和 $=\frac{1}{4}\pi\bullet c^2$
以 $\overline{AB}$ 為半徑的同度數扇形 ($\frac{1}{4}$圓、$\frac{1}{3}$圓...) (不含$\frac{1}{2}$圓)	m 度的扇形則可提出共同係數 $(\frac{m}{360})\pi$		甲+乙 $=\frac{m}{360}a^2\pi+\frac{m}{360}b^2\pi$ $=\frac{m}{360}\pi(a^2+b^2)$ = 丙 則三個N度的圓的面積總和 $=\frac{m}{180}\pi c^2$

正三角形	正三角形則可提出共同係數 $(\frac{\sqrt{3}}{4})$		$甲+乙=2\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{a}{2}\sqrt{\left[(a)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]}+2\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{b}{2}\sqrt{\left[(b)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]}$ $=\frac{a}{2}\bullet\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{b}{2}\bullet\frac{\sqrt{3}b}{2}$ $=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}+\frac{\sqrt{3}b^2}{4}$ $=\sqrt{3}\frac{a^2+b^2}{4}$ $=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$ $=丙$ 則三個正三角形的面積總和$=\frac{\sqrt{3}}{2}c^2$
等腰三角形(頂角為θ)	等腰三角形(頂角為θ)則可提出共同係數 $(\frac{1}{2}\sin\theta)$		甲+乙 $=\frac{1}{2}a\times a\times\sin\theta+\frac{1}{2}b\times b\times\sin\theta$ $=\frac{1}{2}\sin\theta(a^2+b^2)$ $=\frac{1}{2}\sin\theta\times c^2=丙$ 則三個等腰三角形的面積總和$=\sin\theta\times c^2$
等腰三角形(底角為θ)	等腰三角形(底角為θ)則可提出共同係數 $(\frac{1}{4}\tan\theta)$		甲+乙 $=\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times a\times\tan\theta+\frac{1}{2}\times\frac{b}{2}\times b\times\tan\theta$ $=\frac{1}{4}\tan\theta(a^2+b^2)$ $=\frac{1}{4}\tan\theta\times c^2=丙$ 則三個等腰三角形的面積總和$=\frac{1}{2}\tan\theta\times c^2$
菱形(2 個頂角為θ的等腰三角形組成)	菱形則可提出共同係數 $(\sin\theta)$		甲+乙 $=a\times a\times\sin\theta+b\times b\times\sin\theta$ $=\sin\theta(a^2+b^2)$ $=\sin\theta\times c^2=丙$ 則三個菱形的面積總和$=2\sin\theta\times c^2$

正 n 邊形	正 n 邊形則可提出共同係數 $(\frac{1}{4}\cot\theta\times n)$		每個等腰三角形的高= $\frac{a}{2}\cot\theta$ 每個等腰三角形的面積 = $\frac{1}{2}\times a\times\frac{a}{2}\cot\theta=\frac{1}{4}a^2\cot\theta$ 甲+乙 $=\frac{1}{4}a^2\cot\theta\times n+\frac{1}{4}b^2\cot\theta\times n$ $=\frac{1}{4}\cot\theta\times n(a^2+b^2)$ $=\frac{1}{4}\cot\theta\times n(c^2)$ 則三個正n邊形的面積總和 $=\frac{1}{2}\cot\theta\times n(c^2)$

除了基本的扇形半圓正多邊形及等腰三角形的基本圖形之外我們運用乘法交換律與乘法結合律透過圖解法製成許多圖形變換延伸並應用畢氏定理

4. 組合圖形一

已知直角△ABC 斜邊長度=c，分別以△ABC 的三個邊長為邊分別做三個相似圖形。二股為邊所做的圖形為甲、乙，斜邊為邊所做的圖形為丙(以 C 為邊做正三角形，再以 $\frac{c}{2}$ 為邊做 2 個小正三角形)。 已知斜邊 c，求甲、乙、丙三圖形之面積和?	
$甲+乙=12\times\frac{1}{2}\times\frac{a}{4}\sqrt{\left[a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]}+12\times\frac{1}{2}\times\frac{b}{4}\sqrt{\left[b^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]}$ $=\frac{3}{2}a\sqrt{0.75a\times0.5a}+\frac{3}{2}b\sqrt{0.75b\times0.5b}$ $=\frac{3}{2}a\sqrt{0.375a^2}+\frac{3}{2}b\sqrt{0.375b^2}$ $=\frac{3}{2}a\times\frac{\sqrt{6}}{4}a+\frac{3}{2}b\times\frac{\sqrt{6}}{4}b$ $=\frac{3\sqrt{6}}{8}a^2+\frac{3\sqrt{6}}{8}b^2$ $=\frac{3\sqrt{6}}{8}(a^2+b^2)$ $=\frac{3\sqrt{6}}{8}c^2=丙$ 則3個圖形的面積總和 $=\frac{3\sqrt{6}}{4}c^2$	

5. 組合圖形二

已知直角△ABC 斜邊長度=c，分別以△ABC 的三個邊長為半徑(邊)分別做三個相似圖形(由 1 個正方形,2 個 60 度的扇形和 3 個正三角形組成)。二股為半徑(邊)所做的圖形為甲、乙，斜邊為半徑(邊)所做的圖形為丙。

已知斜邊 c，求甲、乙、丙三圖形之面積和?

甲＋乙＝

$$a^2+2a^2\times\frac{1}{6}\pi+3\times\frac{a}{2}\sqrt{\left[(a)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]}+b^2+2b^2\times\frac{1}{6}\pi+3\times\frac{b}{2}\sqrt{\left[(b)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]}$$

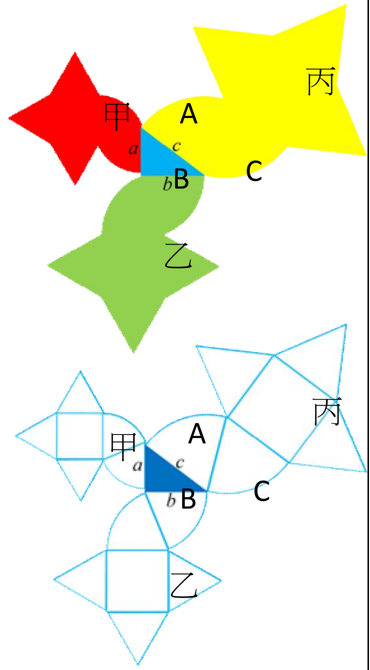
$$=\frac{3a^2+a^2\pi}{3}+\frac{3a}{2}\times\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{3b^2+b^2\pi}{3}+\frac{3b}{2}\times\frac{\sqrt{3}b}{2}$$

$$=\frac{12a^2+4a^2\pi}{12}+\frac{9\sqrt{3}a^2}{12}+\frac{12b^2+4b^2\pi}{12}+\frac{9\sqrt{3}b^2}{12}$$

$$=\frac{\left(12+4\pi+9\sqrt{3}\right)(a^2+b^2)}{12}$$

$$=\frac{\left(12+4\pi+9\sqrt{3}\right)c^2}{12}$$

則三個圖形的面積總和$=\dfrac{\left(12+4\pi+9\sqrt{3}\right)c^2}{6}$



6. 組合圖形三

已知直角△ABC 斜邊長度=c，分別以△ABC 的三個邊長為半徑分別做三個相似圖形。二股為半徑所做的圖形為甲、乙，斜邊為半徑所做的圖形為丙。

已知斜邊 c，求甲、乙、丙三圖形之面積和?

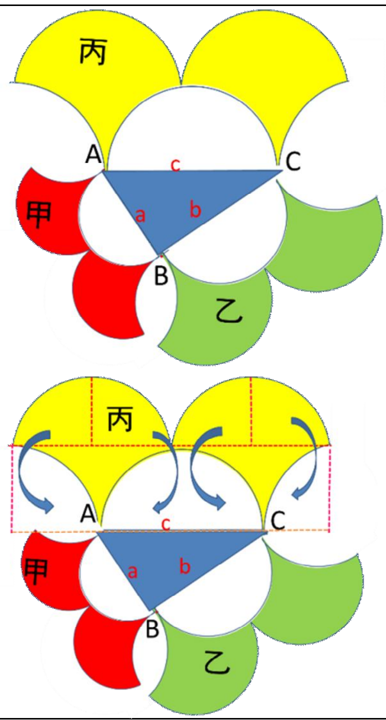
甲＋乙$=2a\bullet 0.5\mathrm{a}+2b\bullet 0.5b$

$=\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2$

$=\mathrm{c}^2$

＝丙

則 3 個圖形的面積總和$=2\,\mathrm{c}^2$



7.組合圖形四

已知直角△ABC 斜邊長度=c, 分別以△ABC 的三個邊長為半徑分別做三個相似圖形。二股為半徑所做的圖形為甲、乙，斜邊為半徑所做的圖形為丙。(以 C 為邊的二個 60 度扇形交集)

已知斜邊 c，求甲、乙、丙三圖形之面積和?

$$甲+乙=2\times\frac{1}{6}a^2-\frac{a}{2}\sqrt{\left[(a)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]}+2\times\frac{1}{6}b^2\pi-\frac{b}{2}\sqrt{\left[(b)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{1}{3}a^2\pi-\frac{a}{2}\bullet\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{1}{3}b^2\pi-\frac{b}{2}\bullet\frac{\sqrt{3}b}{2}$$

$$=\frac{1}{3}a^2\pi-\frac{\sqrt{3}a^2}{4}+\frac{1}{3}b^2\pi-\frac{\sqrt{3}b^2}{4}$$

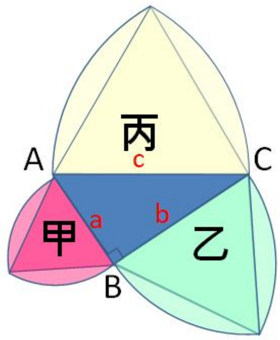
$$=\frac{4a^2\pi-3\sqrt{3}a^2}{12}+\frac{4b^2\pi-3\sqrt{3}b^2}{12}$$

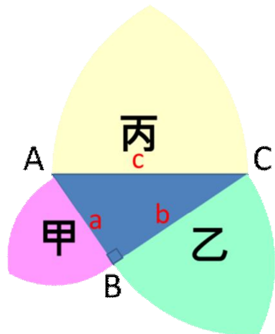
$$=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12}a^2+\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12}b^2$$

$$=\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{12}c^2$$

$=$丙

則三個圖形的面積總和 $=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{6}c^2$





8.組合圖形五

已知直角△ABC 斜邊長度=c, 分別以△ABC 的三個邊長為半徑分別做三個相似圖形。二股為半徑所做的圖形為甲、乙，斜邊為半徑所做的圖形為丙。

已知斜邊 c，求甲、乙、丙三圖形之面積和?

$$甲+乙=2\times(\frac{a}{4})^2+(\frac{a}{4})^2\pi+2\times(\frac{b}{4})^2+(\frac{b}{4})^2\pi$$

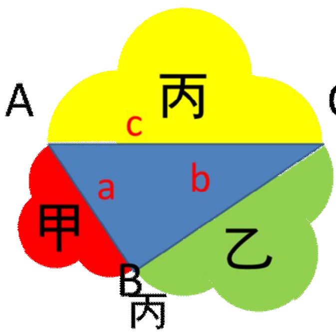
$$=2\times\frac{a^2}{16}+\frac{a^2}{16}\pi+2\times\frac{b^2}{16}+\frac{b^2}{16}\pi$$

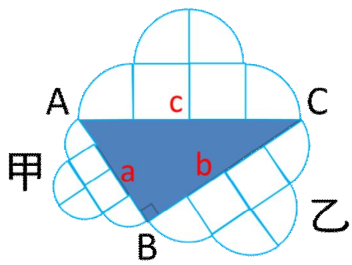
$$=(2+\pi)\frac{a^2}{16}+(2+\pi)\frac{b^2}{16}$$

$$=\frac{2+\pi}{16}(a^2+b^2)$$

$$=\frac{2+\pi}{16}c^2$$

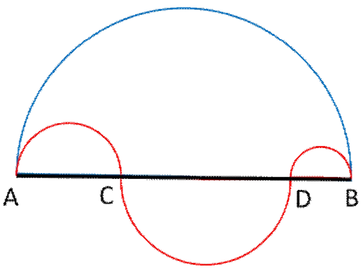
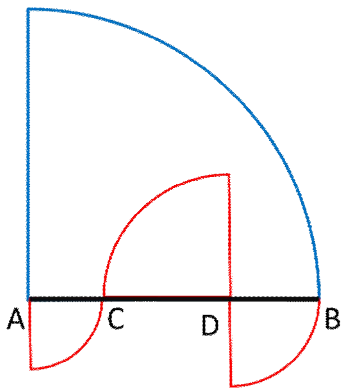
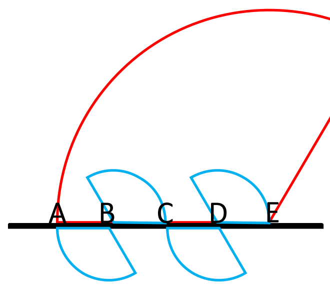
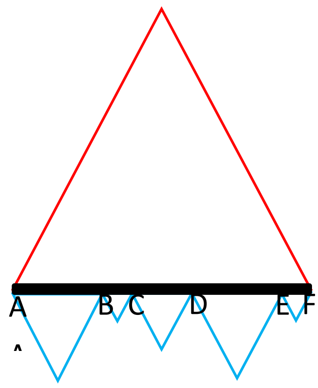
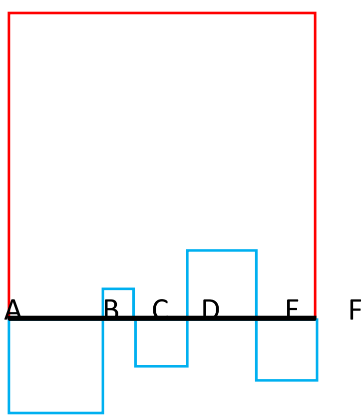
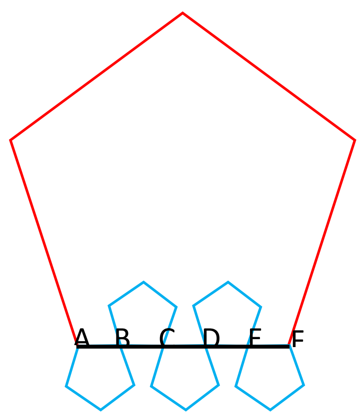
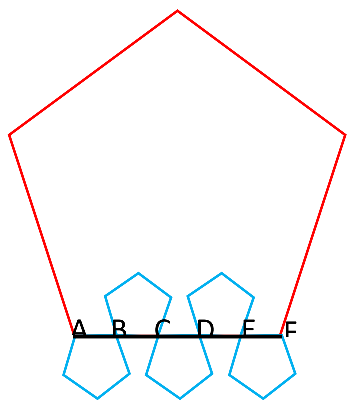
則3個圖形的面積總和 $=\frac{2+\pi}{8}c^2$





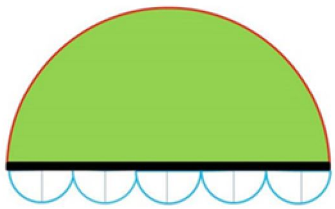
肆、結果與討論

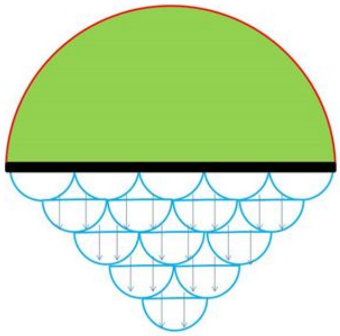
一、已知線段 $\overline{AB}$ 的長度表示路徑總和

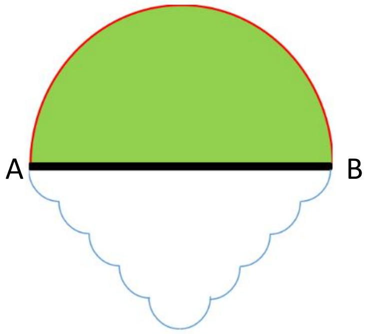
<table>
<tr>
<td colspan="2" rowspan="2">1. 已知線段 $\overline{AB}$ 的長度，在 $\overline{AB}$ 中任取 C、D、…..多點，分別以 $\overline{AC}$、$\overline{CD}$、….為直徑作半圓，這些紅色半圓曲線總和為 $\frac{\overline{AB}}{2}\pi$
2. 已知線段 $\overline{AB}$ 的長度，在 $\overline{AB}$ 中任取 C、D、…..多點，分別以 $\overline{AC}$、$\overline{CD}$、$\overline{BD}$…為半徑作任意 m 度扇形，這些紅色弧長曲線總和為 $2m(\frac{\overline{AB}}{360})\pi+\overline{AB}$
3.已知線段 $\overline{AB}$ 的長度，在 $\overline{AB}$ 中任取 C、D、…..多點，分別以 $\overline{AC}$、$\overline{CD}$、$\overline{BD}$…為邊作正 N 邊形，這些紅色周長總和為 $(n-1)\overline{AB}$</td>
<td>半圓路徑
$=\frac{\overline{AB}}{2}\pi$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>四分之一圓路徑
$=\frac{\overline{AB}}{2}\pi+\overline{AB}$</td>
<td>任意 m 度扇形
$=2m(\frac{\overline{AE}}{360})\pi+\overline{AE}$</td>
<td>正三角形路徑
$=2\overline{AF}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>正方形路徑
$=3\overline{AF}$</td>
<td>正五邊形路徑
$=4\overline{AF}$</td>
<td>任意正 n 邊形路徑
$=(n-1)\overline{AF}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

二、已知線段 $\overline{AB}$ 的長度表示切割平移再組合之路徑總和

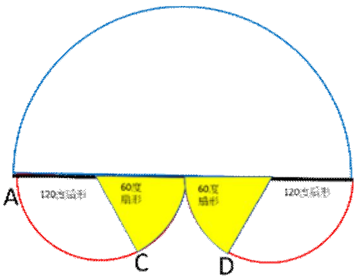
切割再組合的藍色路徑總和為 $\frac{\overline{AB}}{2}\pi$

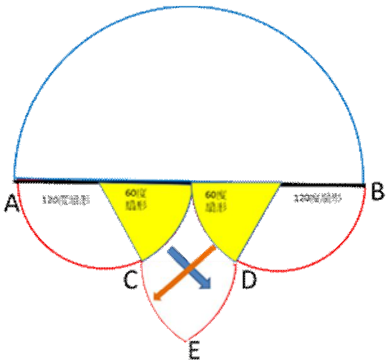


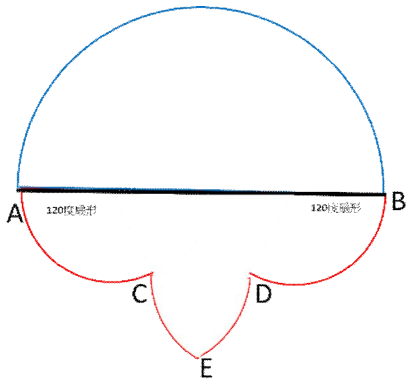




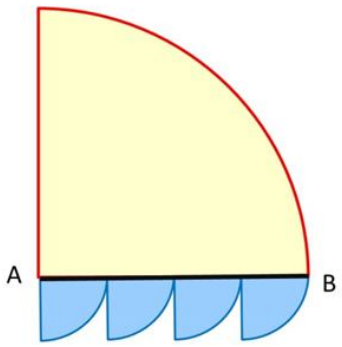
切割再組合的紅色路徑總和為 $\frac{\overline{AB}}{2}\pi$

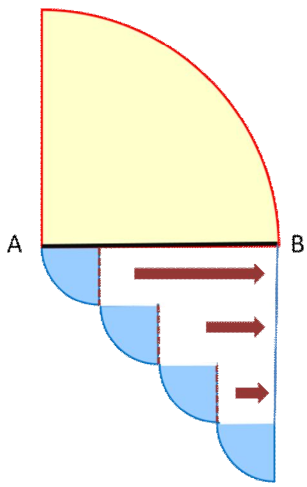


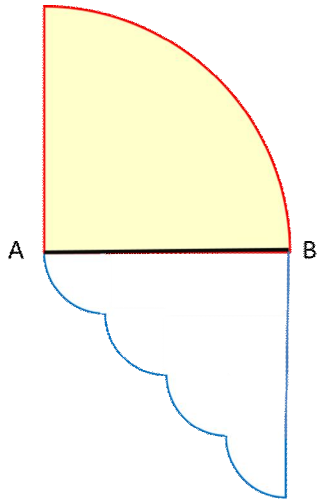




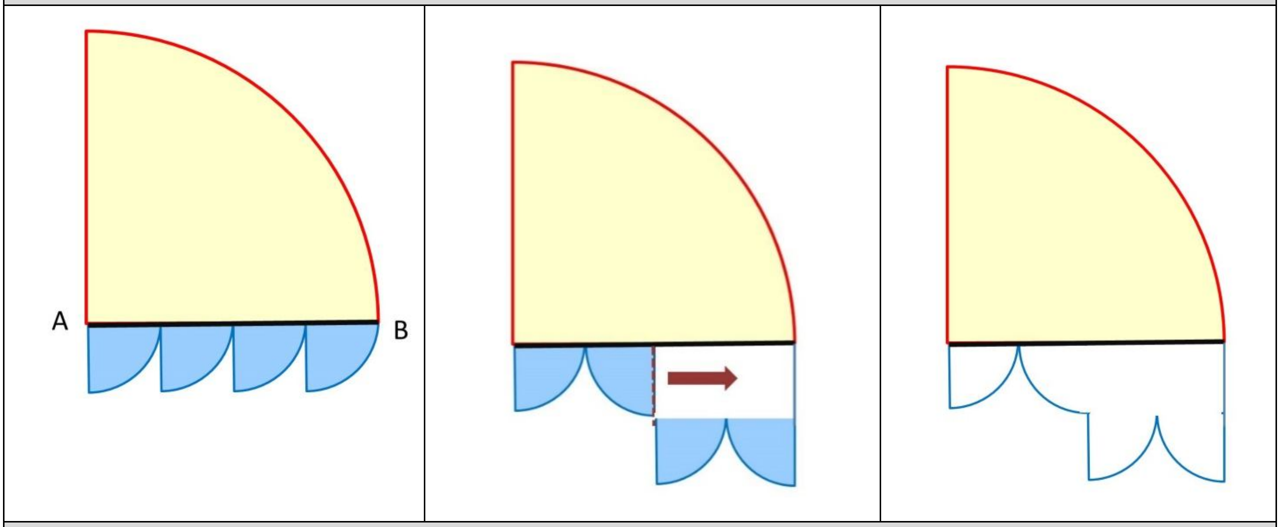
切割再組合的藍色路徑總和為 $\frac{\overline{AB}}{2}\pi + \overline{AB}$



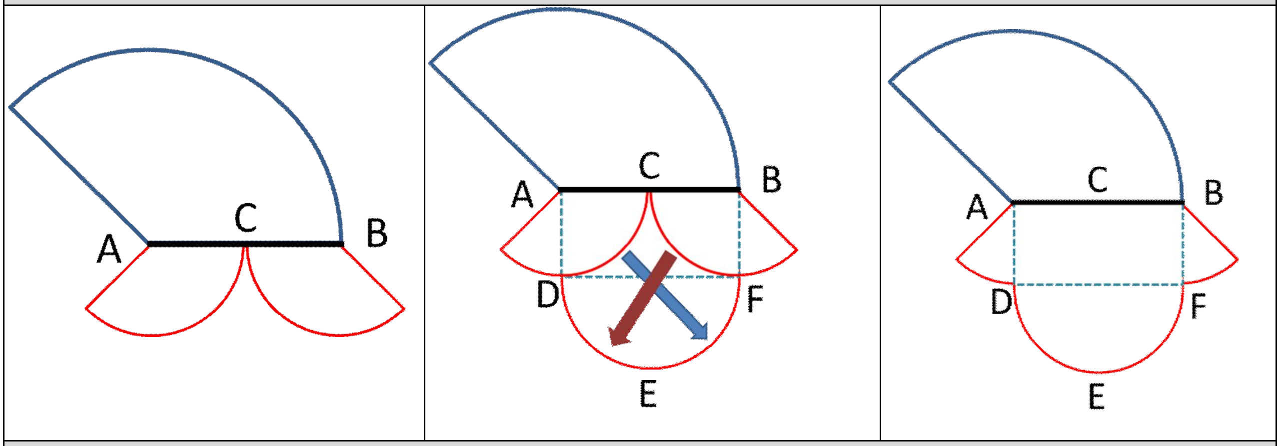




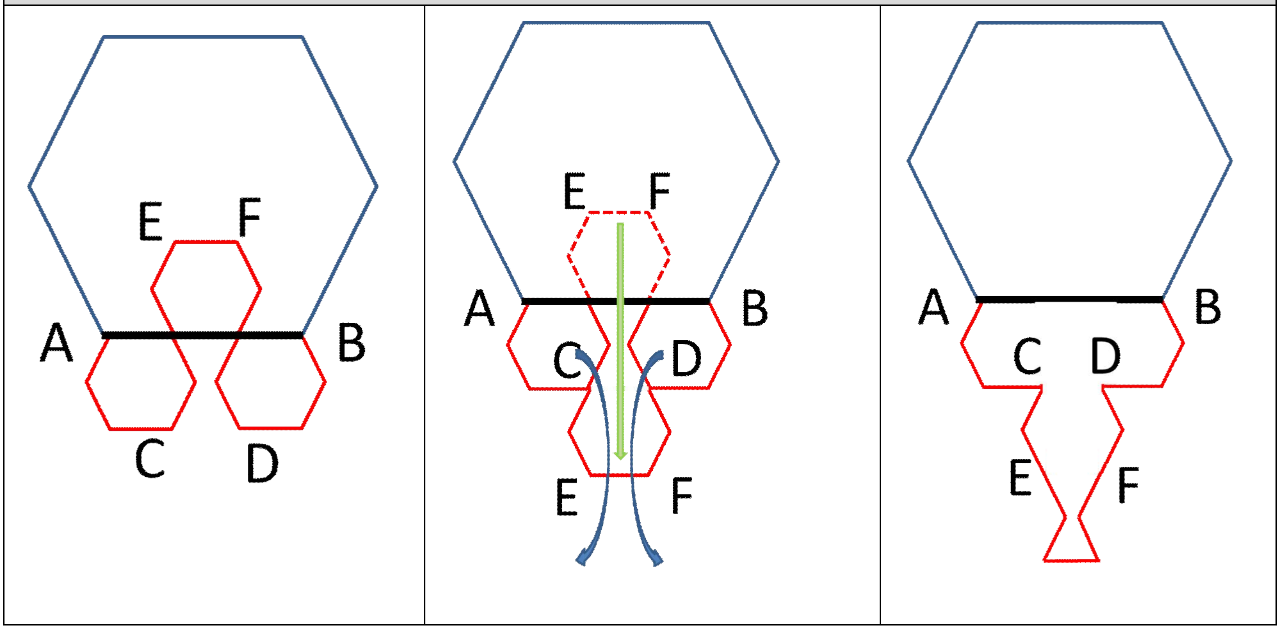
切割再組合的藍色路徑總和為 $\frac{\overline{AB}}{2}\pi + \overline{AB}$



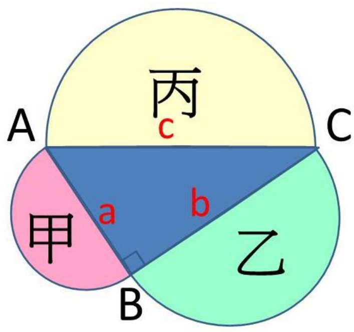
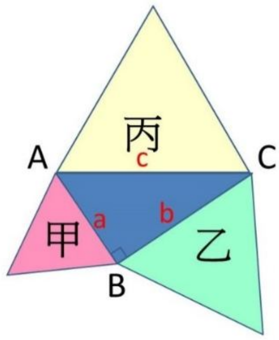
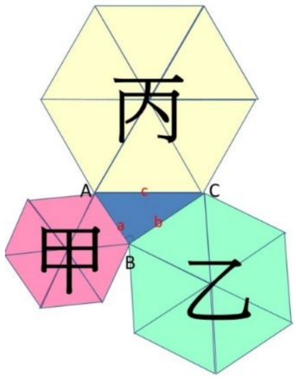
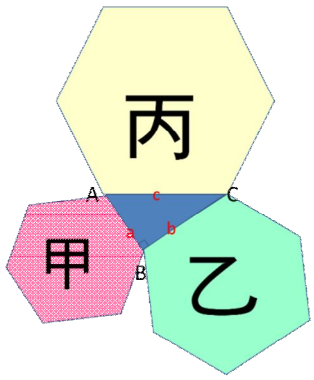
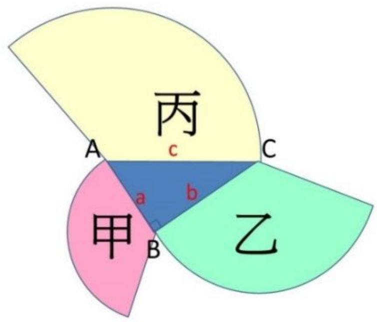
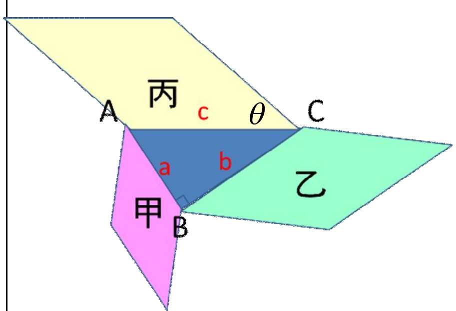
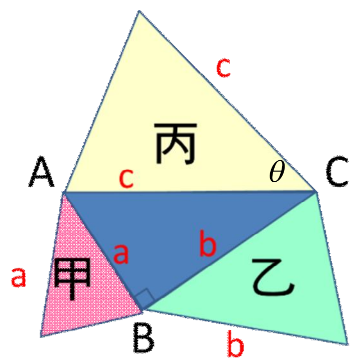
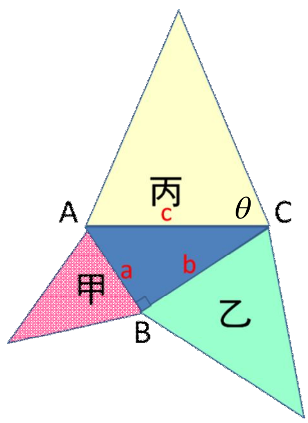
切割再組合的紅色路徑總和為 $2m(\frac{\overline{AB}}{360})\pi + \overline{AB}$ (原為任意度數 m 扇形)



切割再組合的紅色路徑總和為 $(n-1)\overline{AB}$



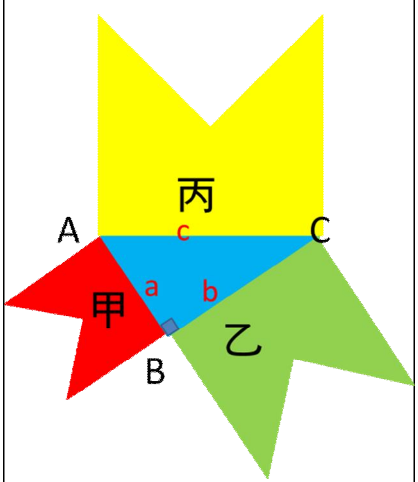
三. △ABC 為直角三角形，∠B=90 度。三邊的邊長 $\overline{AB}$=a，$\overline{BC}$=b，$\overline{AC}$=c

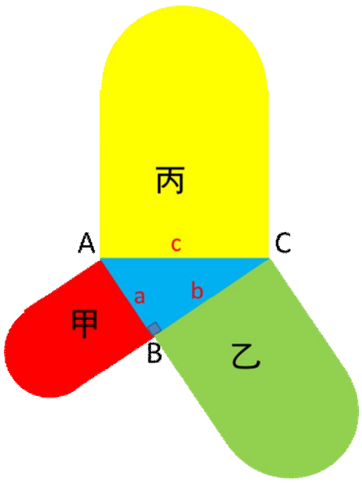
以△ABC 的三個邊長為底邊為直徑分別做**三個半圓**、邊長為半徑做**任意度數三個相似扇形**、邊長成正多邊形之一邊做三個**正多邊形**、邊長為等腰三角形的底邊或腰做三個相似**等腰三角形**，二股為邊所做的圖形為甲、乙，斜邊為邊所做的圖形為丙。皆可滿足甲+乙=丙，並可用斜邊 C 來代表三個圖形的面積總和	三個半圓的面積總和 $=\frac{1}{4}\pi \bullet c^2$	三個正三角形的面積總和 $=\frac{\sqrt{3}}{2}c^2$
		
三個正六邊形的面積總和 $=3\sqrt{3}c^2$	三個正 N 邊形的面積和 $=\frac{1}{2}\cot\theta\times n(c^2)$ $\theta=\frac{180}{n}$	三個N度的圓的面積總和 $=\frac{N}{180}\pi c^2$
		
三個菱形的面積總和 $=2\sin\theta\times c$	三個等腰三角形的面積總和 $=\sin\theta\times c^2$ (頂角為θ)	三個等腰三角形的面積總和 $=\frac{1}{2}\tan\theta\times c^2$ (底角為 θ)
		

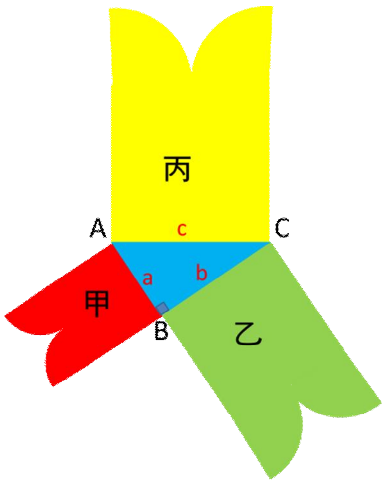
四.畢氏定理應用之其他組合圖形

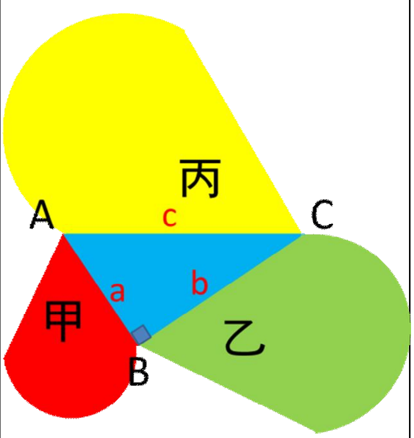
1. **△ABC 為直角三角形，∠B=90 度。三邊的邊長** $\overline{AB}$=a，$\overline{BC}$=b，$\overline{AC}$=c，以△ABC 的三個邊長為底邊為<u>直徑分別做**三個半圓**</u>、邊長為<u>半徑做**任意度數三個相似扇形**</u>、邊長成正多邊形之一邊做三個<u>**正多邊形**</u>、邊長為等腰三角形的底邊或腰做三個相似<u>**等腰三角形**</u>，二股為邊所做的圖形為甲、乙，斜邊為邊所做的圖形為丙。皆可滿足甲+乙=丙，並可用斜邊 C 來代表三個圖形的面積總和。而將正多邊形或是扇形、半圓加以組合推疊，甲+乙=丙等式一樣存在且面積總和都可以用 C 來表示。

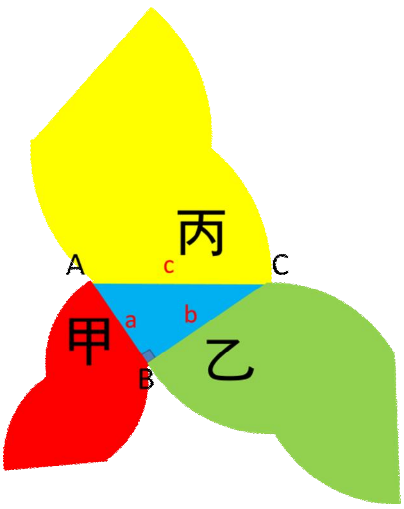
2.將原邊長 C 的正多邊形或是扇形及半圓細分成 N 個 $\frac{c}{n}$ 的正多邊形只要組合圖形中可以利用分配律提出 c^2，就可以滿足甲+乙=丙的等式並且可用 C 表示面積和。以下為圖形範例。

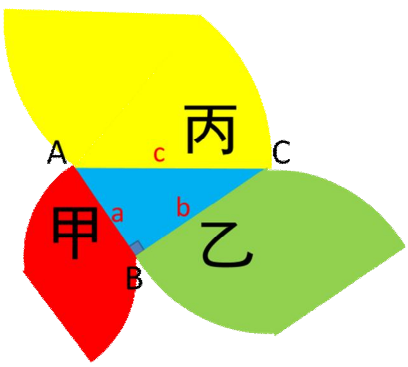


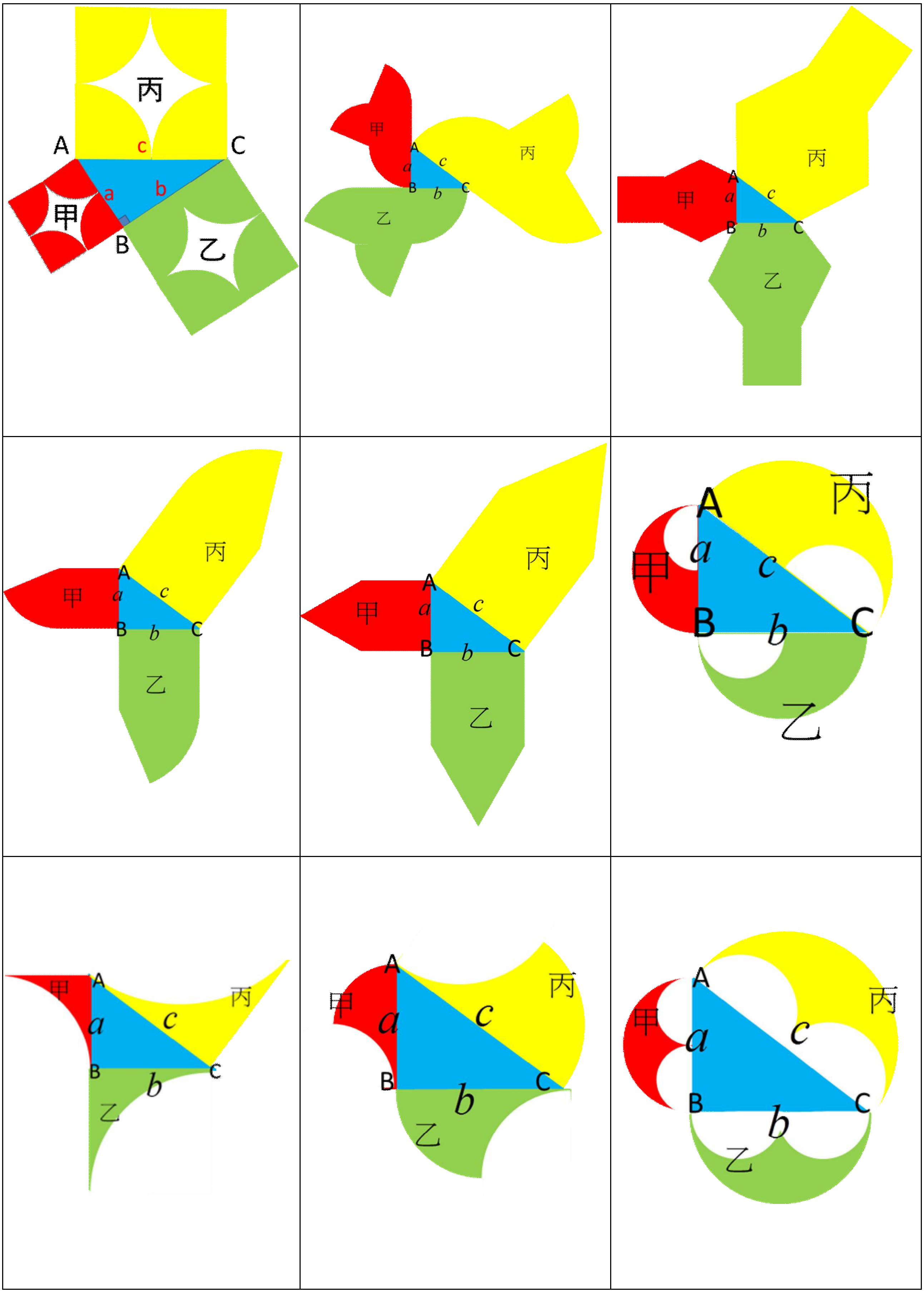






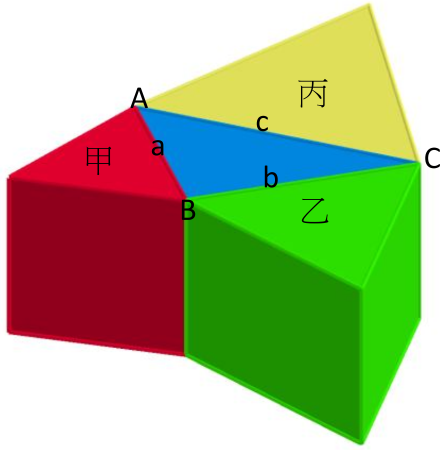





丙
A
c
C
a
b
甲
B
乙

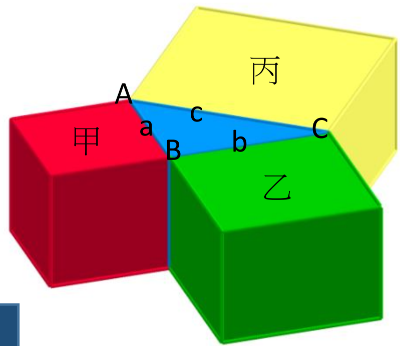
五、**延伸討論**如果將平面圖形拉成立體圖形，也能利用邊長 C 推算出體積和嗎?

1.正三角柱體積

<table>
<tr><td colspan="2">將三角形的畢氏定理圖形拉成高 K 公分的立體角柱圖形</td></tr>
<tr><td>甲＋乙＝
$K\left\{2\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{a}{2}\sqrt{\left[(a)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]}+2\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{b}{2}\sqrt{\left[(b)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]}\right\}$
$=K(\frac{a}{2}\bullet\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{b}{2}\bullet\frac{\sqrt{3}b}{2})$
$=K(\frac{\sqrt{3}a^2}{4}+\frac{\sqrt{3}b^2}{4})$
$=\frac{K\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)$
$=\frac{K\sqrt{3}}{4}c^2$
＝丙
則三個正三角柱體積的總和 $=\frac{K\sqrt{3}}{2}c^2$</td><td></td></tr>
</table>

2.四角柱體積

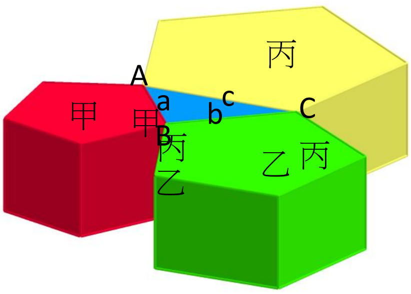
<table>
<tr><td colspan="2">將正方形的畢氏定理圖形拉成高 K 公分的立體角柱圖</td></tr>
<tr><td>$KA^2+KB^2=Kc^2$
則3個正四角柱的體積總和 $=2Kc^2$

我們發現只要是原來平面滿足畢氏定理的圖形如果一起拉高形成柱體都一樣可以滿足(包含組合圖形)
以下我們論證正 N 角柱圖形並做錐體的應用</td><td></td></tr>
</table>

3.正 N 角柱

將正 N 邊形的畢氏定理圖形拉成高 K 公分的圖

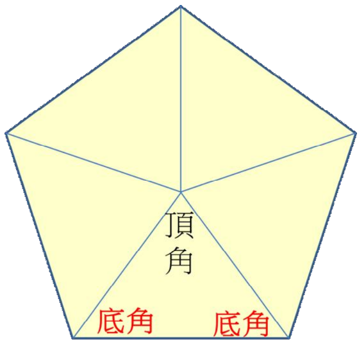
若為正 N 邊形

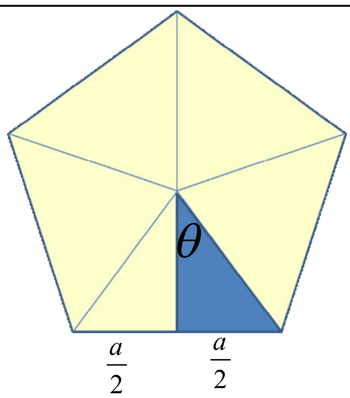


$$甲+乙=\frac{K}{4}a^2\cot\theta+\frac{K}{4}b^2\cot\theta=\frac{K}{4}\cot\theta(\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2)$$

$$=\frac{K}{4}\cot\theta c^2=丙柱體$$

$$甲+乙+丙=\frac{K}{2}\cot\theta c^2$$





等腰三角形垂直作高，

$\theta=\frac{頂角}{2}$

$\theta=\frac{180}{n}$

每一個正 N 邊形都可以分成 N 個頂角 $\frac{360}{n}$ 的全等等腰三角形

每個等腰三角形的高 $=\frac{a}{2}\cot\theta$

每個等腰三角形的面積

$=\frac{1}{2}\times a\times\frac{a}{2}\cot\theta=\frac{1}{4}a^2\cot\theta$

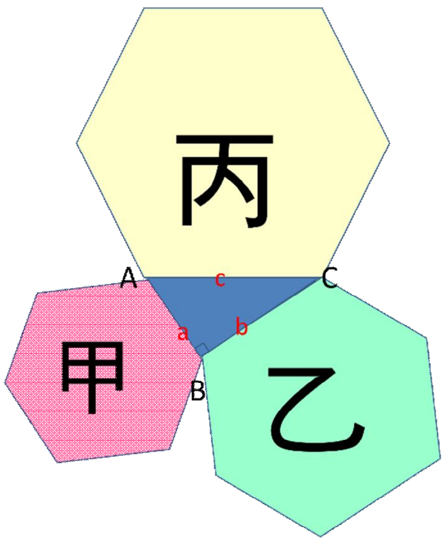
$$甲+乙$$

$$=\frac{1}{4}a^2\cot\theta\times n+\frac{1}{4}b^2\cot\theta\times n$$

$$=\frac{1}{4}\cot\theta\times n(a^2+b^2)$$

$$=\frac{1}{4}\cot\theta\times n(c^2)$$

則三個正n邊形的面積總和 $=\frac{1}{2}\cot\theta\times n(c^2)$



4.四角錐體積

稜錐的體積取決於平面外頂點到底面的距離，以及底面多邊形的面積。前者稱為稜錐的高，後者稱為稜錐的底面積。設 h 為稜錐的高， S 為稜錐的底面積，V 為稜錐的體積，則稜錐的體積可以用以下公式計算 $V=\frac{Sh}{3}$

現在我們將直角三角形從側面拉等高 K 單位，四個側面做三個四角錐

甲角錐=$\frac{AKH}{3}$，乙角錐=$\frac{BKH}{3}$，丙角錐=$\frac{CKH}{3}$

若要有相同係數可以提出來($\frac{K}{3}$)

又需要滿足$A^2+B^2=C^2$

則三個錐體的高必須不同

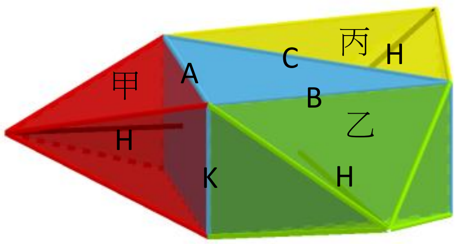
甲錐體的高必須為A，乙錐體的高必須為B，

丙錐體的高必須為C

則甲+乙+丙=$\frac{KA^2}{3}+\frac{KB^2}{3}+\frac{KC^2}{3}$

$=\frac{2KC^2}{3}$

則三個四角錐體積總和$=\frac{2K}{3}C^2$



錐體僅此特例滿足，其他情形皆不滿足

六、延伸討論: 畢氏定理之延伸圖形—畢氏定理樹

▼畢氏定理(Pythagorean theorem)：

為現今幾何學中常見的一種計算方式，主要是由「兩股平方和開根號為斜邊值」及「直角三角形兩股平方和等於斜邊平方」兩大主軸做出的一系列探究，其各自代表著三邊邊長及邊上堆疊圖形面積關係。

而現在要談的即為常見畢氏定理之延伸圖形—畢氏定理樹。

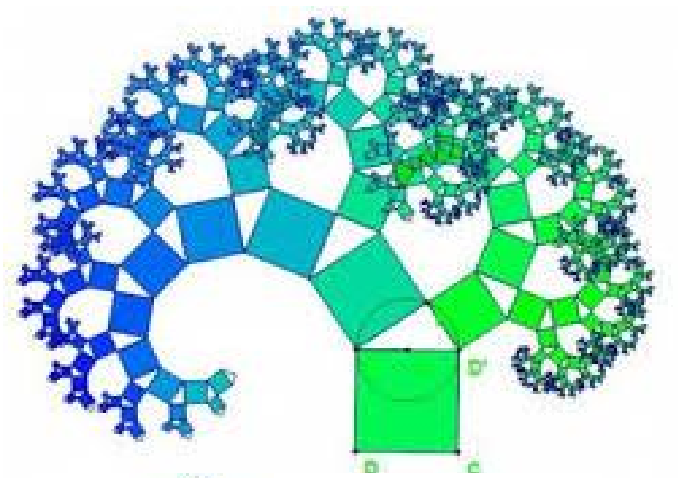
一般教材將其歸納於較難之習題。雖說其為進階習題，但普遍教材皆只清一色談到在直角三角形上堆疊正方形 (如下圖:畢氏定理樹示意圖)

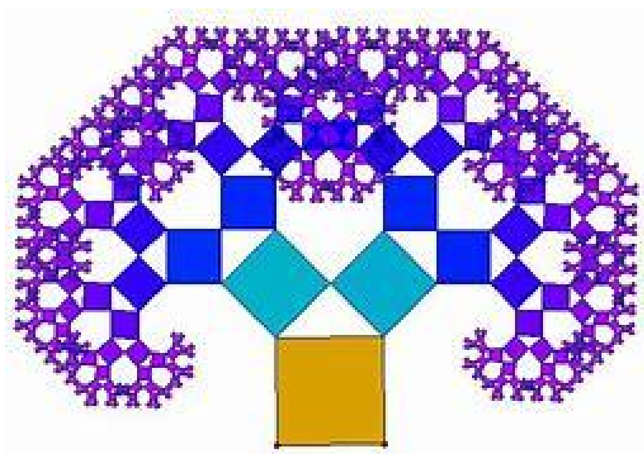
這也引導我們加以思考一難道畢氏定理樹真的僅限於正方形的堆疊而再無其他可能嗎?

透過種種計算驗證，我們發現原來其堆疊可能包含三種:

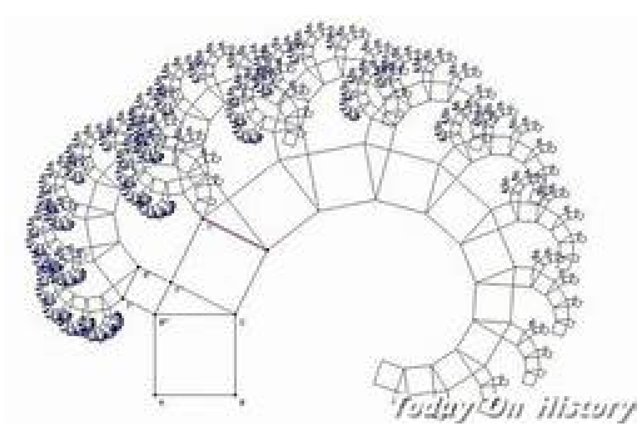
$$\begin{cases} \text{正n邊形} \\ n^\circ\text{扇形} \\ \text{含兩條直線邊長的不規則圖形} \end{cases}$$

由於不規則圖形之變數過於龐大而不便統計，故我們在研究中針對前兩者加以探討。但在繪製過程裡我們發現一種限制，即並非每一種正多邊形或扇形都可以作為繪製對象，而關鍵問題在於 — 角度。

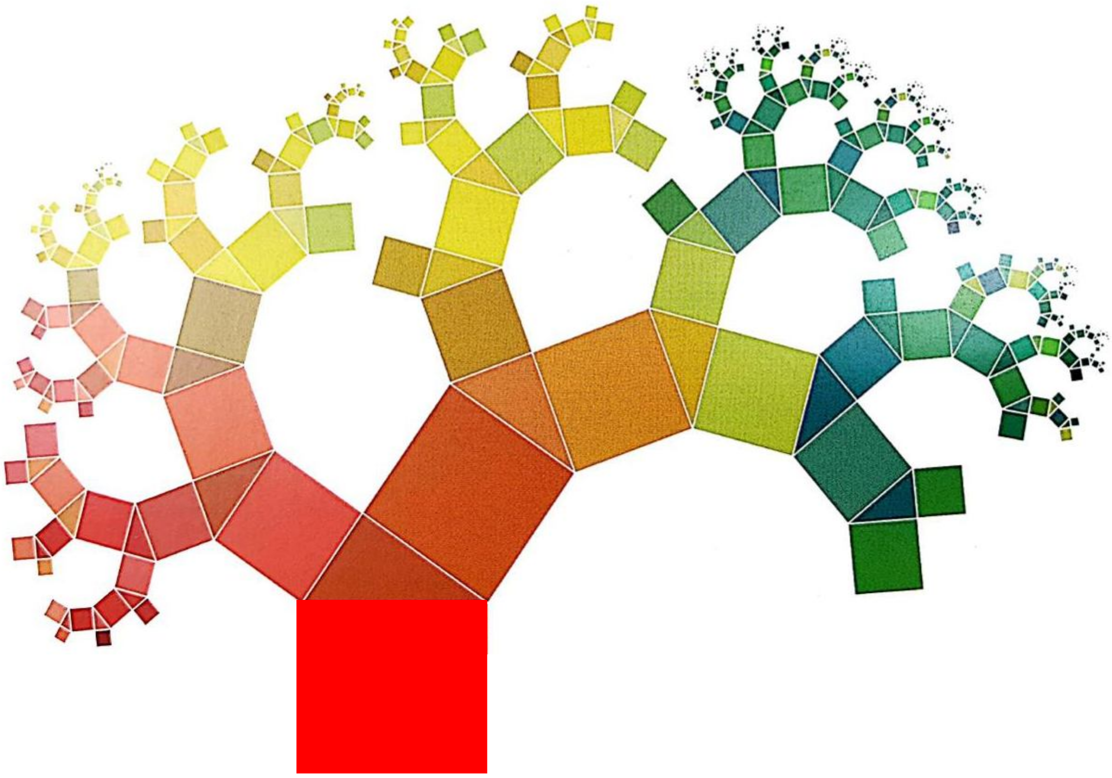




(畢氏定理樹示意圖)

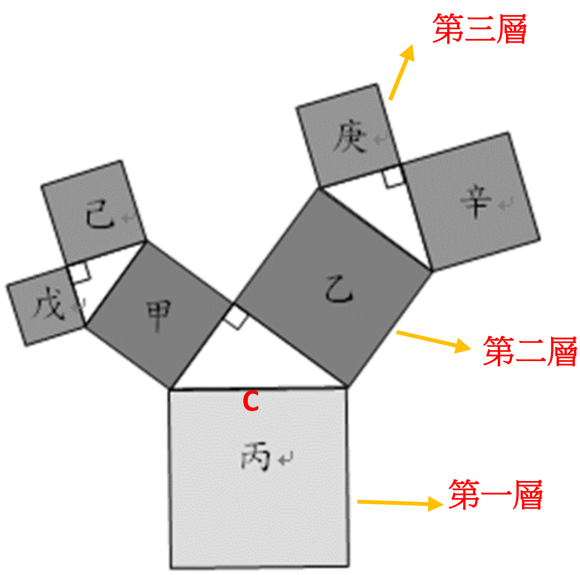


1、如果是層層堆疊的畢氏定理樹也能用 C 來表示面積總和嗎?



<table>
<tr><td colspan="2">已知直角△ABC 斜邊長度=c，分別以△ABC 的三個邊長為邊長做正方形並層層推疊如下圖。

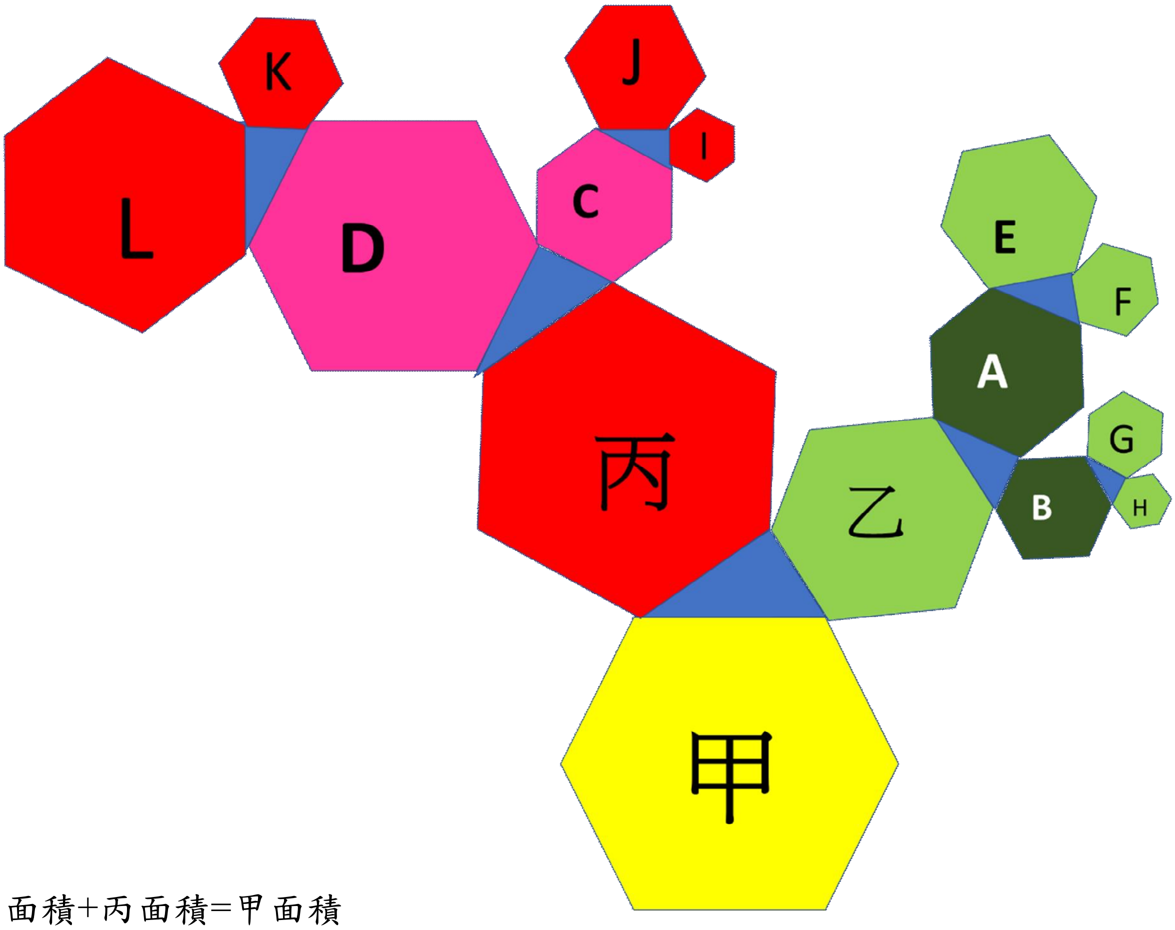
已知斜邊 c，求甲、乙、丙、戊、己、庚、辛　七圖形之面積和?</td></tr>
<tr><td>戊面積+己面積=甲面積
庚面積+辛面積=乙面積
甲面積+乙面積=丙面積
(甲+乙)+(丙)+(戊+己)+(庚+辛)
=丙+丙+甲+乙
=丙+丙+丙
=$3(c^2)$

三層畢氏定理樹
所有正方形總合為 $3(c^2)$
K 層畢氏定理樹
所有正方形總合為 $K(c^2)$</td><td></td></tr>
</table>

2.將畢氏定理樹中的正方形改成其他圖形也成立嗎?

(1)正六邊形的畢氏定理樹

<table>
<tr><td>已知直角△ABC 斜邊長度=c，分別以△ABC 的三個邊長為邊長做正六邊形並層層推疊如下圖。也能用 C 表示所有正六邊形的面積嗎?</td></tr>
<tr><td>

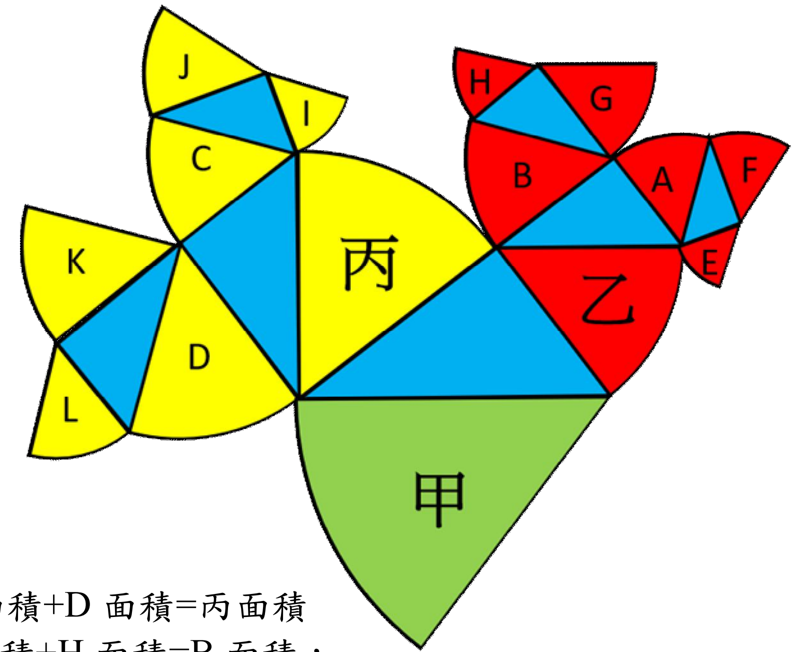


乙面積+丙面積=甲面積
C 面積+D 面積=丙面積，A 面積+B 面積=乙面積
J 面積+I 面積=C 面積，K 面積+L 面積=D 面積，
E 面積+F 面積=A 面積，G 面積+H 面積=B 面積，
(乙+丙)+(甲)+(C+D)+(A+B)+(G+H)+(E+F)+(J+I)+(K+L)
=(乙+丙)+甲+丙+乙+B+A+C+D
=(乙+丙)+甲+(丙+乙)+(乙+丙)
=4 面積=$4\times 3\sqrt{3}(c^2)$

三層畢氏定理樹
所有正六邊形總合為 **4*** $3\sqrt{3}(c^2)$
K 層畢氏定理樹
所有正六邊形總合為 $K(3\sqrt{3}c^2)$

</td></tr>
</table>

(2)扇形的畢氏定理樹

已知直角△ABC 斜邊長度=c，分別以△ABC 的三個邊長為邊長做扇形並層層推疊如下圖。也能用 C 表示所有扇形的面積嗎?
 乙面積+丙面積=甲面積 A 面積+B 面積=乙面積，C 面積+D 面積=丙面積 E 面積+F 面積=A 面積，G 面積+H 面積=B 面積， I 面積+J 面積=C 面積，K 面積+L 面積=D 面積， (E+F)+(G+H)+(I+J)+(K+L) =(A+B)+(C+D) =乙+丙

伍、結論

(一)、我們發現，只要在已知長度的 $\overline{AB}$ 上作相似形，並且能利用乘法分配律逆運算提出相同係數，則紅色線段總長=藍色線段總長。**可用一條線乘上相同係數表示總周長。**

(二)、我們發現，如果將可符合結論(一)的圖形，進行【等分/平行平移】、【等分/翻轉平移】、【對稱分割/交叉平移】，也可提出相同係數，則紅色線段總長=藍色線段總長，**可用一條線乘上相同係數表示總周長。**

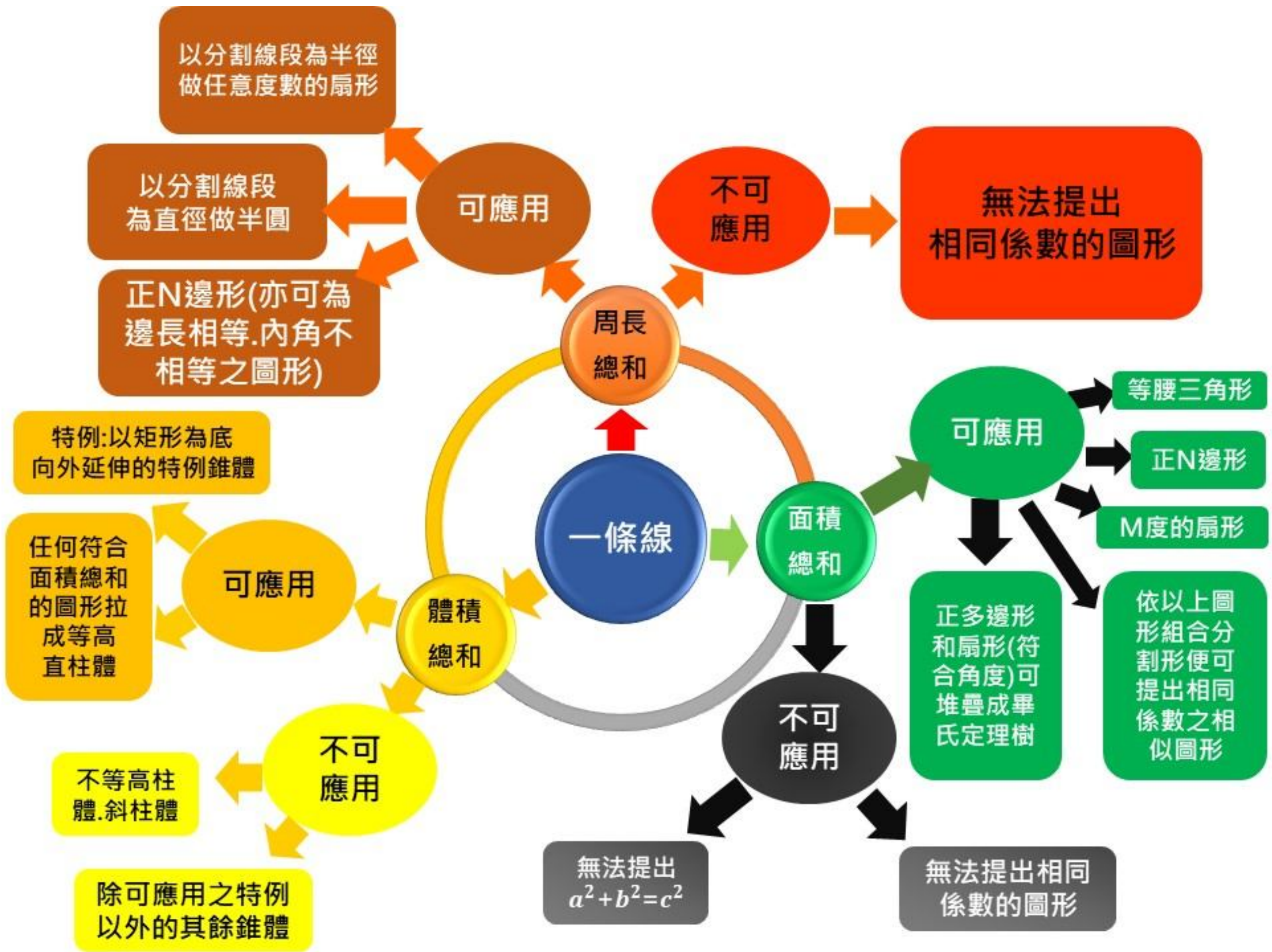
(三)、我們發現，只要在直角三角形的三邊作半圓、正 N 邊形、相似等腰三

角形等……，並且能提出相同係數，只剩 $a^2+b^2=c^2$，則甲+乙的面積=丙的面積，且可用**斜邊長平方乘兩倍相同係數表示所有面積總和。**

(四)、我們發現，如果將可符合結論(三)的圖形進行組合或是圖形變換，也可提出相同係數，則甲+乙的面積=丙的面積。且可用**斜邊長平方乘兩倍相同係數表示所有面積總和。**

(五)、我們發現，將符合結論(三)、(四)的圖形拉成柱體或椎體也可符合甲+乙的體積=丙的體積。

(六)、我們發現，將符合結論(三)的有直線可連接的基本圖形可層層堆疊成畢氏定理樹，**K 層畢氏定理樹所有圖形面積總和總合** K(相同係數*c^2)(扇形及正 N 邊形若角度過大是無法堆疊畢氏定理樹,詳細推理如附件)



心得:

在學校的數學培訓課時，一道題目勾起我們的興趣。「已知一條線段的長度，要算出線段上多個半圓所組成的曲線」，原本我們認為這不過是國小等級的題目，直到深入研究後，多了不同的圖形和許多複雜的變形，才發覺這道題目不如我們所想的那麼簡單。

之後，我們開始進一步的討論，從「線」延伸到「面」，以畢氏定理為基礎進行研究，做出各種基本圖形及其變形。除了一般的正方形，我們也嘗試以正多邊形、任意度數扇形等代替正方形的位置，發現無論何種圖形，都能符合畢氏定理—$A^2+B^2=C^2$。之後，還有各種圖形的分割、重組、移動，因為要繪出各式各樣的變形圖及計算出面積，後面還有體積的計算，以及層層推疊的畢氏定理樹延伸。使得這部分與前面相比，困難許多，但也因為這些讓我們絞盡腦汁的過程，也讓我們得到完成之後的成就感。原來一條已知線可以製造這麼多的驚喜。

陸、參考文獻

一、王維震、王柏茵、許喆凱、謝博庭 (2018)。**圓來如此**。

中華民國第 57 屆全國中小學科學展覽會國小組數學科

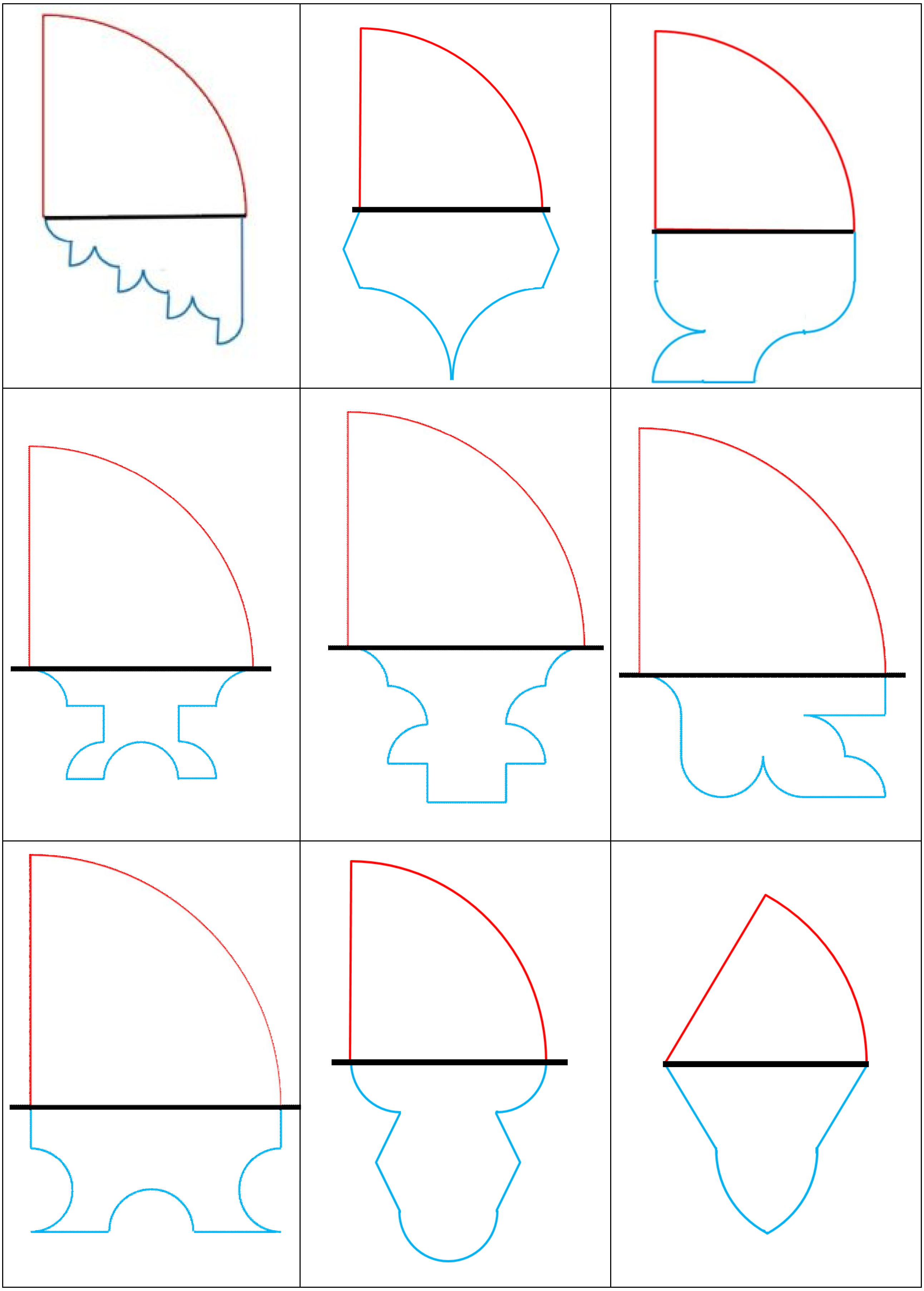
二、盛立人、嚴鎮軍（2001）。**從勾股定理談起**。台北市：九章出版社

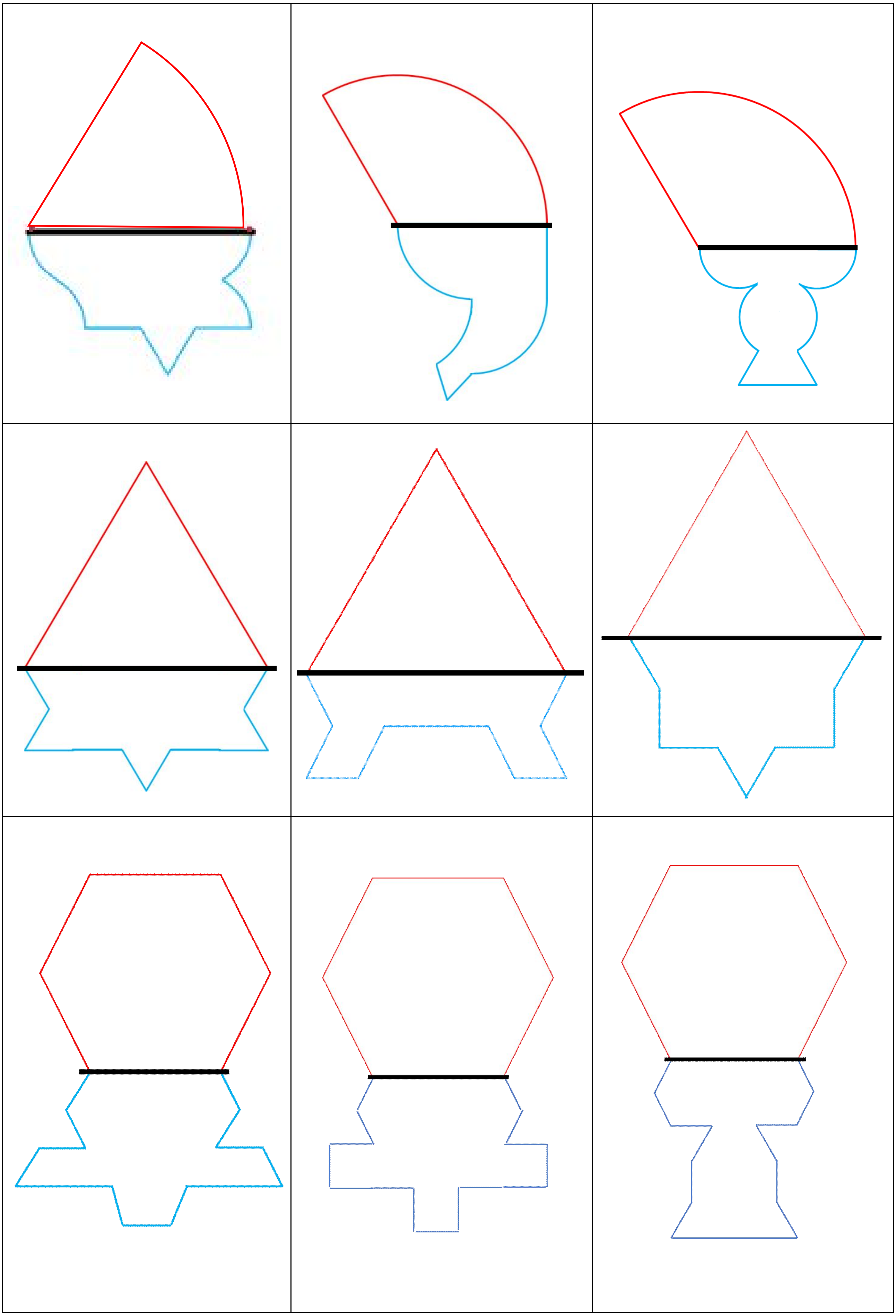
三、林信宏、厲量。**麻辣講義 3 2-3 畢氏定理**。新北市：康軒文教事業

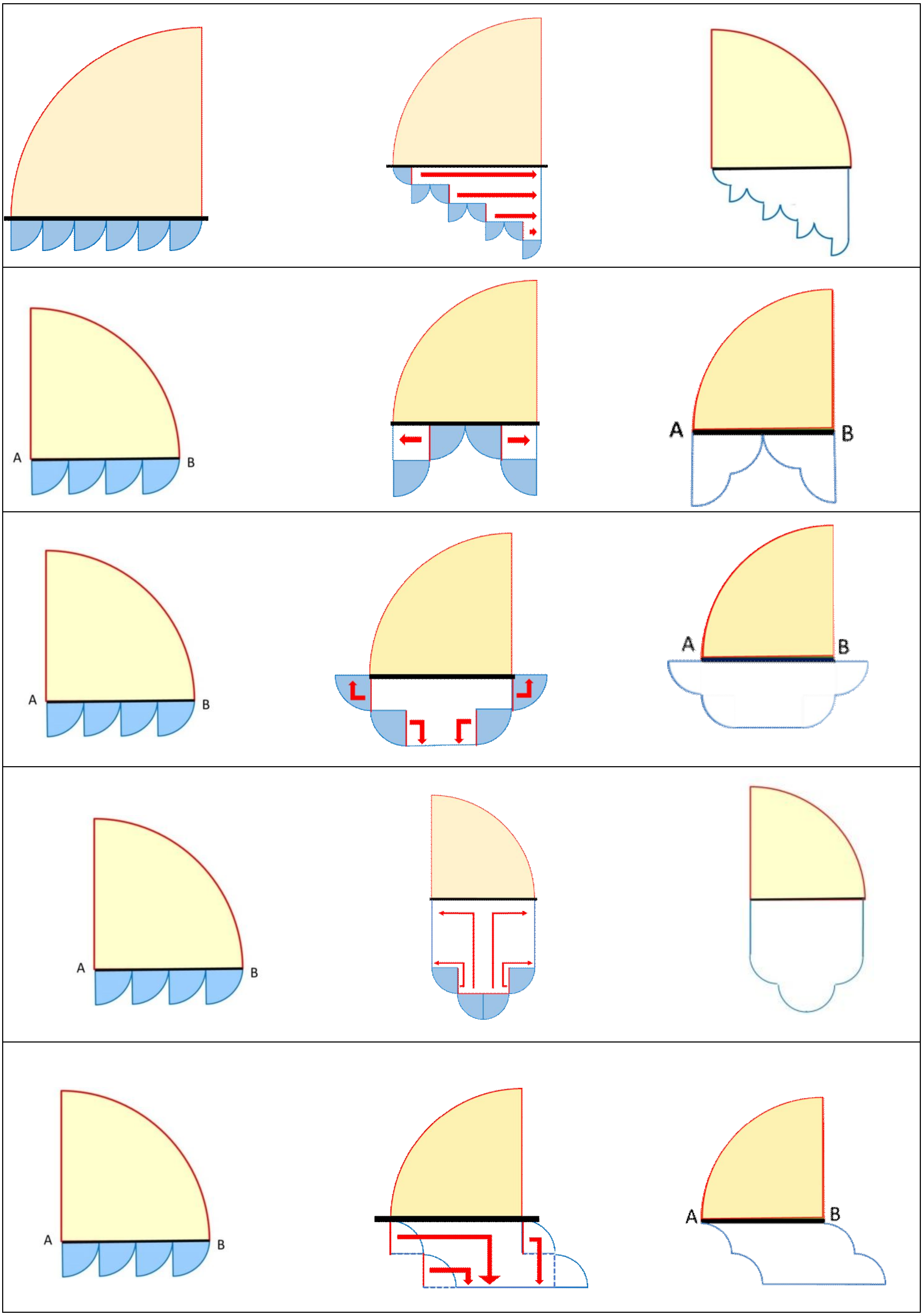
四、馮梵、歐坤堂。**學習講義 4 2-1 生活中的平面圖形**。新北市：康軒文教事業

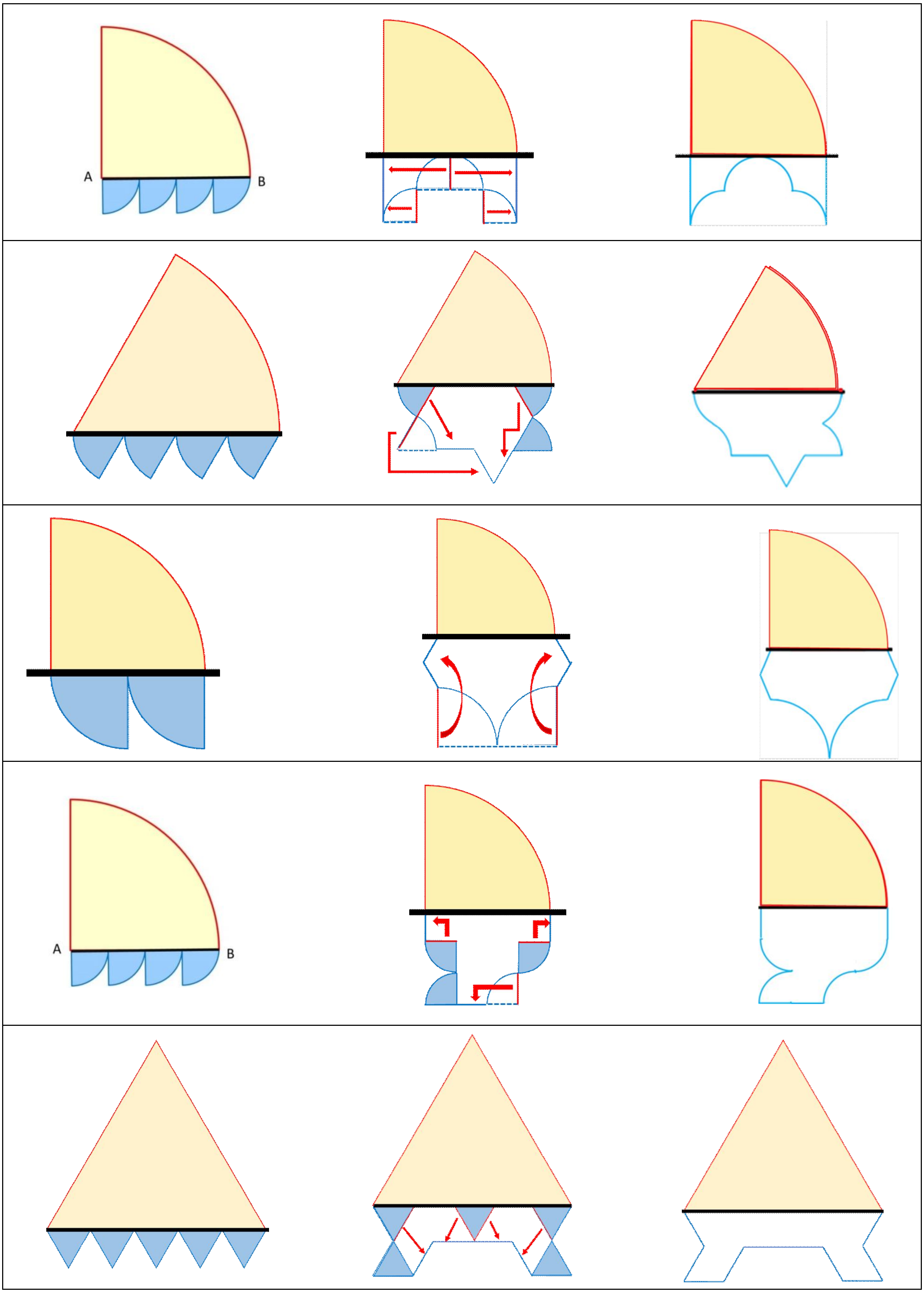
柒、附件

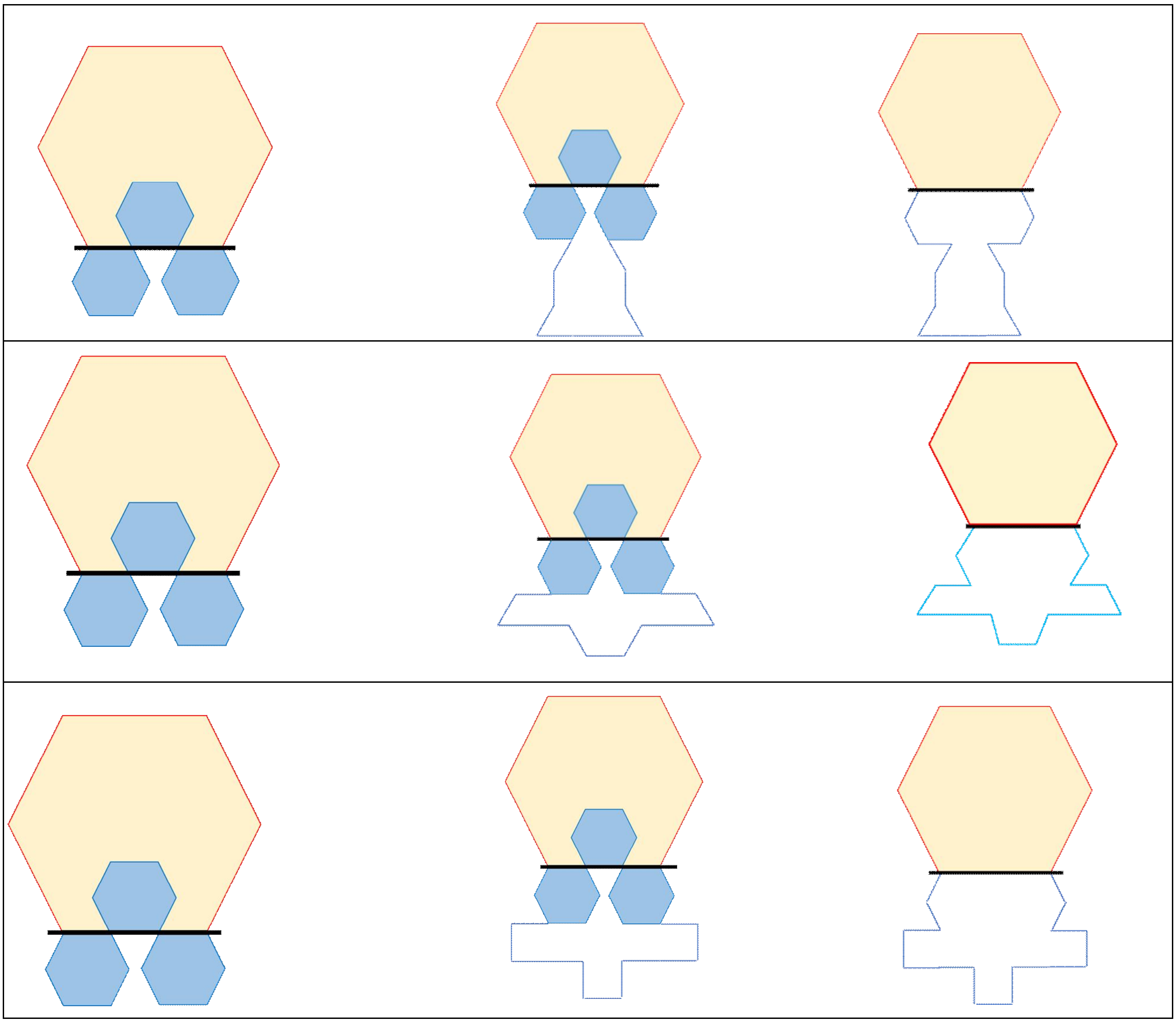
一.其他周長圖形分割平移轉換變形圖形如下






A
B
A
B
A
B
A
B
A
B
A
B
A
B
A
B

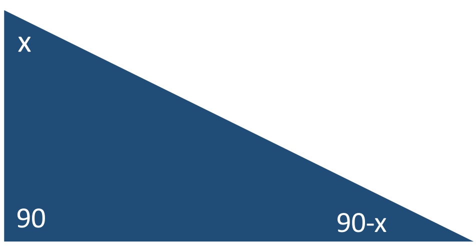

A
B
A
B



附件二畢氏定理樹之探討(正多邊形篇)

(一)在研究中我們了解畢氏定理樹的堆疊並非全然可行，更說明在過程中的最大問題為角度。在下面我們將先以正多邊形堆疊為例，完整的呈現畢氏定理樹的限制並加以探討。

1.前提:首先在這裡我們將一直角三角形的內角角度定為 x°-(90-x)$^\circ$-90°。



(如左圖所示)

而後我們以一正 N 邊形做堆疊，首先先求其單個內角角度為 $\frac{180(N-2)}{N}$ ，

接著再假設所應用之直角三角形內角為 a(可為 90°、90-x°及 x°)，

便可以得出不等式:2〔$\frac{180(N-2)}{N}$〕+a≦360。

2.原理:

已知圓心角為 360°，扣除所用之 a 角度，所剩下的即為 2 個 $\frac{180(N-2)}{N}$ 加總度數，換言之即 a+2 $\frac{180(N-2)}{N}$ 不得大於 360°。

3.探討:a 為直角三角形中內角，換言之，在我們選擇 a 時，必會剔除兩個角(以下以 b 代稱兩角度和)，接著我們將為其設一函數(以 f 代稱)以探討其限制。

(1) f(b)=90，a =90，將其帶入不等式

→2〔$\frac{180(N-2)}{N}$〕+a≦360

→2〔$\frac{180(N-2)}{N}$〕+90≦360

→2〔$\frac{180(N-2)}{N}$〕≦270

→〔$\frac{180(N-2)}{N}$〕≦135

◆〔$\frac{180(N-2)}{N}$〕代表一個正多邊形的單一內角度數，在上述限制(必須小於 90°)中，可能圖形有正三角形.正四邊形.正五邊形.正六邊形.正七邊形。

(2) f(c)= (180-x)，a= x，將其帶入不等式

→2〔$\frac{180(N-2)}{N}$〕+a≦360

→2〔$\frac{180(N-2)}{N}$〕+x≦360

→2〔$\frac{180(N-2)}{N}$〕≦360-x

→〔$\frac{180(N-2)}{N}$〕≦ $\frac{360-x}{2}$

◆由於 x 為不定值，須看實際直角三角形才可得出可用圖形。

(3) f(c)=(90+x)，a=(90-x)，將其帶入不等式

$\rightarrow 2\left[\frac{180(N-2)}{N}\right]+a \leqq 360$

$\rightarrow 2\left[\frac{180(N-2)}{N}\right]+90-x \leqq 360$

$\rightarrow 2\left[\frac{180(N-2)}{N}\right]-x \leqq 270$

$\rightarrow 2\left[\frac{180(N-2)}{N}\right] \leqq 270+x$

$\rightarrow \left[\frac{180(N-2)}{N}\right] \leqq \frac{270+x}{2}$

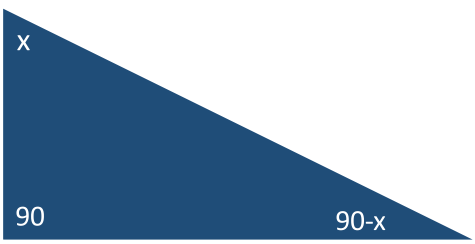
◆由於 x 為不定值，亦須看實際直角三角形才可得出可用圖形。

畢氏定理樹之探討(扇形篇)

(二)在上篇中我們以假設角度及函數的方式證實了一些堆疊上的限制，但僅次於正多邊形方面，所以在此章中我們針對 n°扇形為主，探究其角度限制。

1.前提:

同扇形篇前提，我們一樣將直角三角形內角設為 x°-(90-x)°-90°。



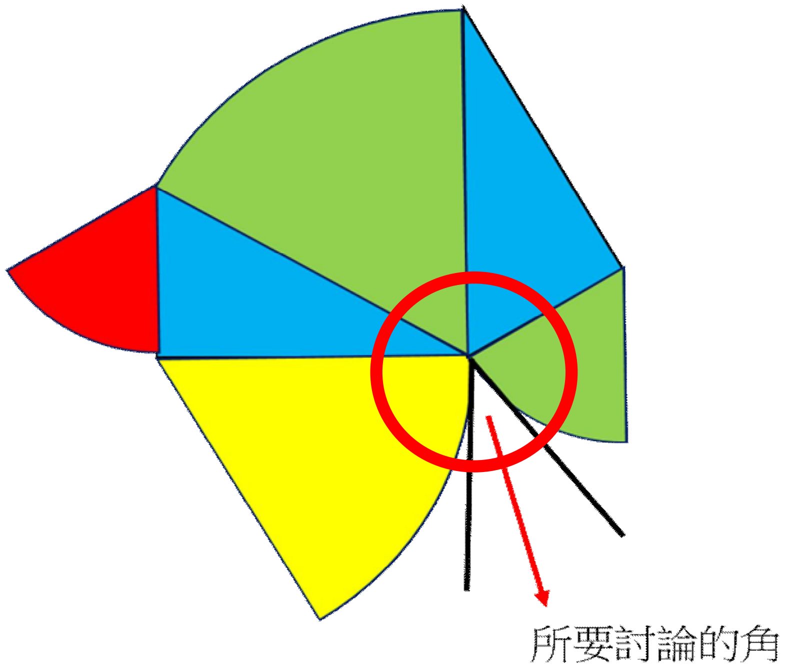
不同於上一篇，在本章中我們發現直角三角形在堆疊過程中每個端點將會分配到兩個直角三角形中的角(角度不一定，可能為 x°、90-x°或是 90°，在下方將以 a 和 b 代稱之)及兩個直角(弧上切線與弧垂直)且還有一個 n°(原始扇形圓心角)。

於是我們得到一個不等式:a+b+180+n≦360，經化簡後得最終式:a+b+n≦180。

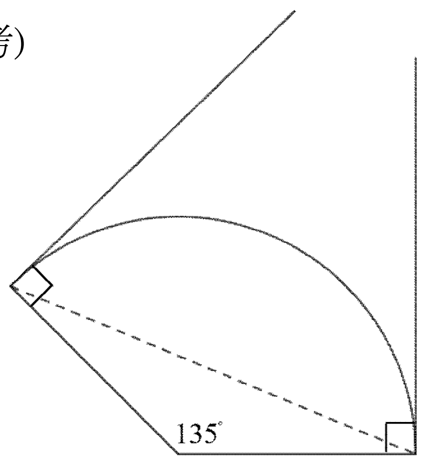
2.原理:

已知一個圓內角為 360°，而在堆疊過程中將會出現許多「角度群組」，這些群組如先前所提，是由兩個直角三角形中的角.兩個直角及一個象徵原始扇形圓心角的 n°所組成。而所謂限制，即最終的 a+b+n 超出了範圍，即 180°。

詳細說明請見下圖



(圖中黑線為扇形弧上切線，以直角計算之，為確定任何扇形切線皆與其垂直，我們繪製了下圖僅供參考)



3.探討:

已假設直角三角形三個內角分別為 x°、$90-x^\circ$及 90°，透過配對發現 a+b 共有 6 種組合(已刪除數值相同者)，分別為:

(1)	兩角皆為 x°
(2)	兩角皆為 90°
(3)	兩角皆為$(90-x)^\circ$
(4)	一角為 90°，另一角為 x°
(5)	一角為$(90-x)^\circ$，另一角為 90°
(6)	一角為 x°，另一角為$(90-x)^\circ$

而後可對應得六種相異的(a+b)值:

(1) $2x^\circ$　(2) 180°　(3) $(180-2x)^\circ$

(4) $(90+x)^\circ$　(5) $(180-x)^\circ$　(6) 90°

並將其帶入先前得到的不等式 $a+b+n\leqq 180$，化簡後得到六項 n 的不等式

(1) $2x+n\leqq 180 \rightarrow n\leqq 180-2x$

(2) $180+n\leqq 180 \rightarrow n\leqq 180-180 \rightarrow n\leqq 0$

(3) $(180-2x)+n\leqq 180 \rightarrow n\leqq 180-(180-2x) \rightarrow n\leqq 2x$

(4) $(90+x)+n\leqq 180 \rightarrow n\leqq 180-(90-x) \rightarrow n\leqq 90+x$

(5) $(180-x)+n\leqq 180 \rightarrow n\leqq 180-(180-x) \rightarrow n\leqq x$

(6) $90+n\leqq 180 \rightarrow n\leqq 180-90 \rightarrow n\leqq 90$

但在此 6 項不等式中，第 2 項為不可行。因 n 須為正數此次堆疊才可成立，

若 n≦0，n 非零即負數，又角度不可能出現負數，n=0 代表即沒有堆疊任何扇形。

故需剔除第 2 項不等式，得到最後 5 種可能。

接著我們再更進一步討論: 什麼情況可使繪製的扇形符合上面全部限制?

最後發現一些有趣的規則，但在說明前，需要先了解上述 5 種不等式也有數值重複的可能---而後我們將以算式呈現。

4.結果

發現共有 10 種重疊可能:

(1) 180-2x=2x →180=4x →x=45

(2) 180-2x=90-x →x=90 →x 不可能為直角，因三角形中不可存在兩個直角

(3) 180-2x=x →180=3x →x=60

(4) 180-2x=90 →2x=90 →x=45

(5) 2x=90-x →3x=90 →x=30

(6) 2x=90 →x=45

(7) 2x=x →3x=0 →x=0 →角度不得為 0

(8) 90-x=x →2x=90 →x=45

(9) 90-x=90 →x=0 →角度不得為 0

(10) x=90 →x 不可能為直角，因三角形中不可存在兩個直角

得出初步結論:

當 x=60°時，則 180-2x=x

當 $x=45^{\circ}$時，則 $180-2x=2x=90$，且 $90-x=x$

當 $x=30^{\circ}$時，則 $2x=90-x$

再進行延伸，得 4 項規則

1.當 $90>x>60$ 時

→ $2x > 90 > x > (180-2x) > (90-x)$

2.當 $60>x>45$ 時

→ $2x > 90 > (180-2x) > x > (90-x)$

3.當 $45>x>30$ 時

→ $(180-2x) > 90 > 2x > (90-x) > x$

4.當 $30>x>0$ 時

→ $(180-2x) > 90 > (90-x) > 2x > x$

合併 1.2 式，經探究得一結論:

當 $90>x>45$ 時，須達成 $n\leqq(90-x)$才可符合前面所有限制

再合併 3.4 式，經探究另得一結論:

當 $45>x>0$ 時，須達成 $n\leqq x$ 才可符合前面所有限制

附件三

中華民國 第五十七屆中小學科學展覽會國小組數學科 作品名稱：圓來如此