

臺南市 107 年度國中學生獨立研究競賽作品(封面)

作品名稱：哆寶

編號： (由承辦單位統一填寫)

獨立研究作品內文

作品名稱：哆寶

摘要

哆寶牌堆裡有多張卡牌，每張卡排各有數種圖案。根據文獻，任取兩張，兩張卡牌會有一種圖案重複。真的只能有一種重複嗎?深入研究後，我們發現其實任取兩張卡牌可以有多個圖案重複。並觀察其規律，找出了【卡牌張數、一張卡的圖案數、及任兩張卡有幾個圖案重複】的關係式，也研究出【點線法】、【車廂法】及比其他製作方法快的【快速車廂法】來做出各種不同的牌組。此外，我們為我們研究出的【任取兩張，兩張卡牌會有多種圖案重複】的卡牌，設計了許多與【加減乘除】相關的益智遊戲，讓學習數學更為有趣。

壹、研究動機及目的

初次接觸到哆寶這個桌遊時，我們覺得非常刺激有趣。哆寶遊戲介紹:原版哆寶包含 57 張相異遊戲卡牌，含有 57 種相異圖案，每張卡牌上有 8 種圖案。每兩張卡恰只有一種圖案相同。玩家要做的就是用最快速度找出兩張卡牌中相同的圖案，第一位找到相同符號的玩家大聲喊出結果後即可得分。但同時也產生了許多疑問：為什麼任取兩張卡片恰好會只有一個相同圖案?為何任兩張牌不會沒有重複的圖案也不會重複的圖案有兩個以上。我們開始思考他是用什麼方法製造出這些卡牌? 於是我們上網蒐集了許多哆寶的製作方式，發現他們多半只是敘述哆寶製作的流程。並未解釋製作方法的數學原理，所以我們決定探討其中蘊含的數學原理及尋求其他種製作方式並研究哆寶牌組的組合方式是否

只有一種或是有多種方式?

一、找出原版哆寶牌組設計法(資料蒐集)及自行建構其他牌組設計法

二、比較不同牌組設計法間的結構差異，與一張卡片有 n 種圖案，整副牌組共

用了 m 種圖案，整副牌組共有 p 張卡，任兩張牌恰有一種圖案一樣。其中

n 、 m 、 p 的關係式

三、探討任兩張牌是否能恰有二種或是三種圖案一樣。

貳、文獻探討

一、剖析前人研究之優缺點後，我們整理成下列各點:

(一) 作品出處:金門地區第 55 屆中小學科學博覽會國小組數學科 作品名稱:

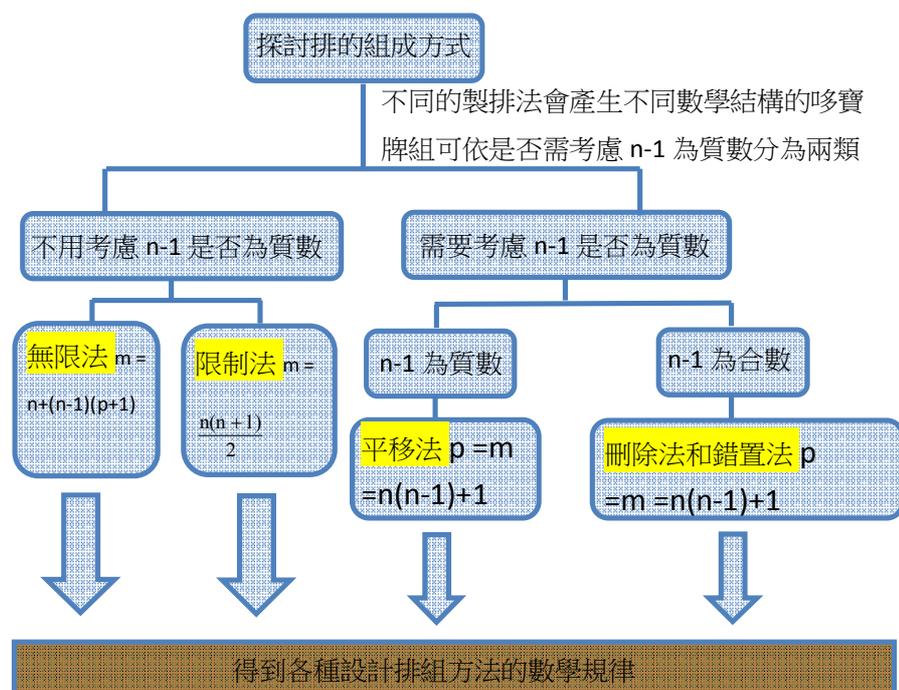
神奇桌遊—哆寶 特色:僅從圖卡中去統計現象，並未說明圖卡組合的原

因及方法如下(每一序號代表一種圖案，一張卡片有 6 種圖案的排列結果)

序號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
出現次數	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
序號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
出現次數	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
序號	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
出現次數	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
序號	31	結果: 一.總張數:31 張 二.總符號數								
出現次數	6									

(二) 作品出處:中華民國第 56 屆中小學科學展覽會高中組數學科 作品名

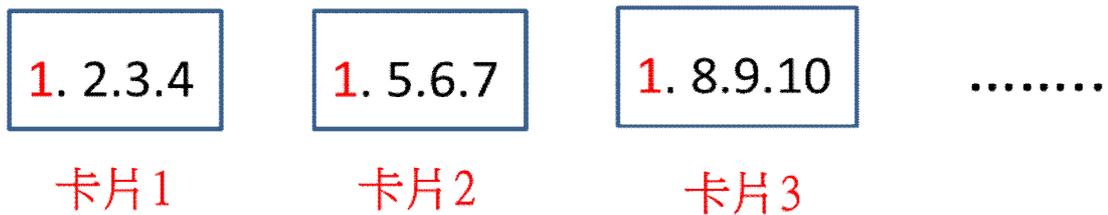
稱:「哆」次的相遇——只有唯一，都是至「寶」 特色: 歸納了四種方法製作哆寶 無限法 限制法 平移法 錯置法，且有說明製作方法與探討每張圖 案數與總圖案數和總張數的關係，將網路上常見哆寶製作的環狀排列法依不同的圖案數(質數或合數)分為平移法及錯置法兩種方法(如下圖)延伸探討:如果任兩張卡片相同的圖案為 2 個或 3 個時該如何製作?(但僅用區間概念)



※以下我們把相異圖案代換成數字 (1.2.3...)

1.無限法如果每張卡片有 n 個圖案，我們固定一種圖案 (即數字 1)，另外再加上 $(n-1)$ 個圖案。每增加一張牌，可以一直向外再擴張 $(n-1)$ 種數字，將可製造出無限張牌。每一張牌都含有一個與其他牌相同的數字 (即數字 1 所代表的圖案，此稱為第一個圖案)，每張牌除了第一個圖案以外會剩下 $n-1$ 個圖案，依照製圖規則來看，這些剩下的圖案都不相同。

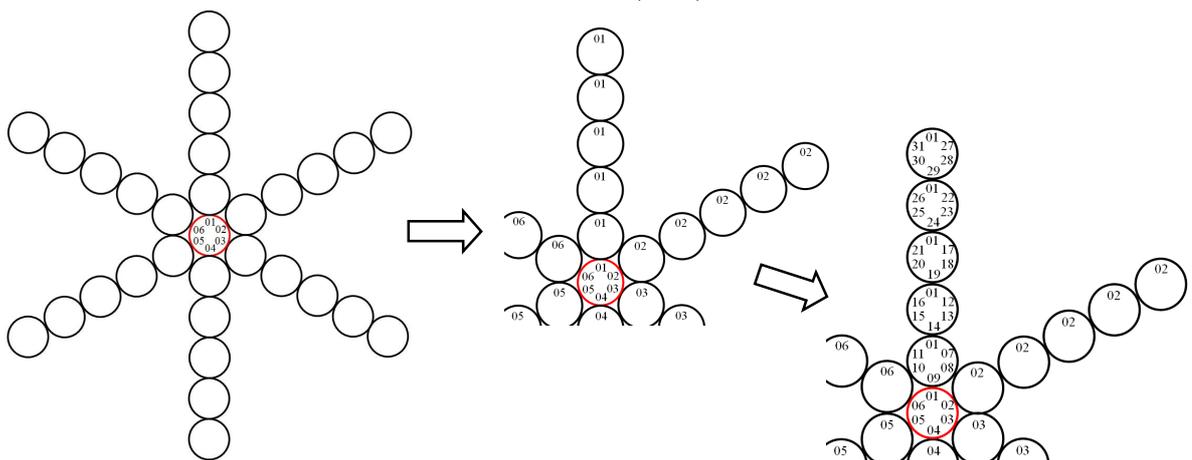
例：每張卡片上有 4 個圖案



2.限制法從文獻上得知此種方法所能製作的排組張數比其他方法來的少，且製做起來相當耗時，也無其他特色之處，故不在此介紹。

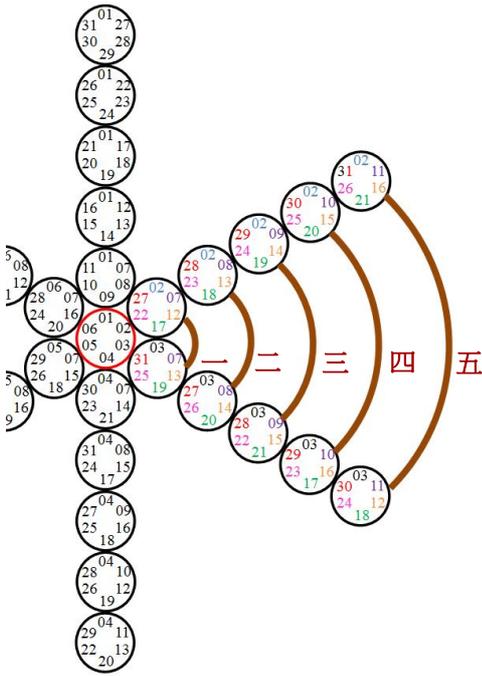
3.平移法(符合原版哆寶牌組設計法)固定中間基礎卡，若每張卡片有 n 個圖形則中間基礎卡則寫上 1 到 n ，並從中間向外擴張 n 個列，每列的第一個數字分別為 1 到 n ，每列共有 $n-1$ 張卡。序列 1 用無限法填入卡片，其餘序列除字首之外的字之外依旋轉平移量依序填入其他數字。

以每張圖卡為六個圖案的卡片為範例($n=6$):

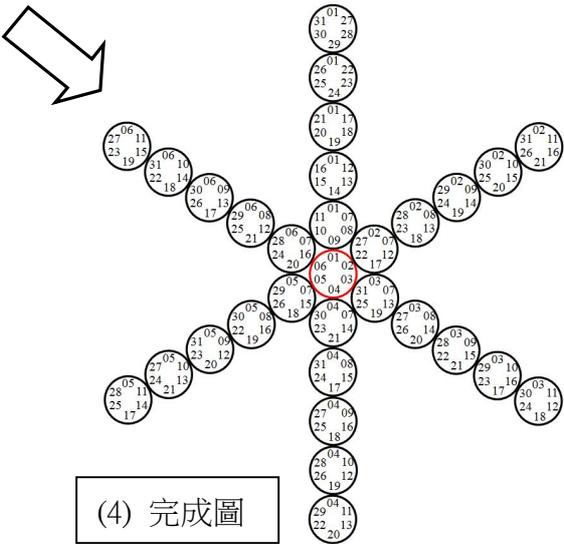


(1) 固定中間基礎卡，並以每列 $n-1$ 個向外放射出 n 列。

(2) 第一列字首為 1，第二列的字首是 2，以此類推，並依照無限法的方式將第一列填入。



(3) 依平移量(見右表)將第 2 3 4 5 6



(4) 完成圖

經過旋轉及數字平移後可以完成卡片。

但是調整數字的變化不易從環狀圖看出，需要化成表格對應旋轉及平移量才能知道數字的變化，前面 3 列容易完成但是之後即使調整旋轉量常有錯誤的現象。若要用這種方法做出一張卡片有 6 個以上的圖案，數列增加到最後會很不容易發現製作錯誤且圖案數多環並不易畫。

組	第二列	平移量	第三列
一	7	0	7
一	12	1	13
一	17	2	19
一	22	3	25
一	27	4	31

二	8	0	8
二	13	1	14
二	18	2	20
二	23	3	26
二	28	4	27

三	9	0	9
三	14	1	15
三	19	2	21
三	24	3	22
三	29	4	28

四	10	0	10
四	15	1	16
四	20	2	17
四	25	3	23
四	30	4	29

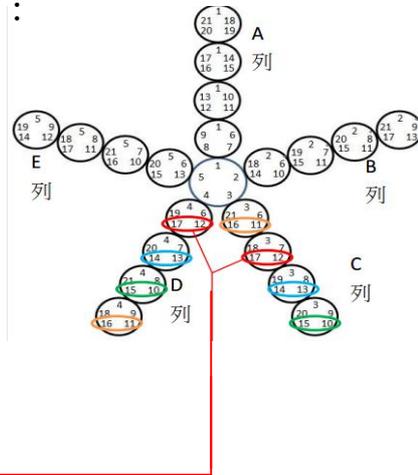
五	11	0	11
五	16	1	12
五	21	2	18
五	26	3	24
五	31	4	30

4.錯置法 n 的限制：n-1 為合數

以一張牌上共有 5 個圖案 (n=5)，

任兩張牌共有 1 種圖案相同為例：

C1	C2	C3	C4	D1	D2	D3	D4
3	3	3	3	4	4	4	3
6	7	8	9	6	7	8	9
11	12	13	10	12	13	10	11
16	17	14	15	17	14	15	16
21	18	19	20	19	20	21	18

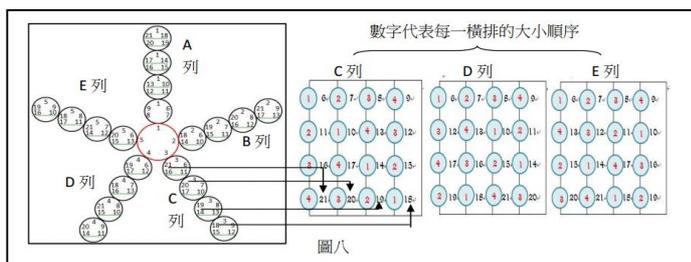


我們用平移法探討，發現 n-1 不是質數時會遇到重複的問題，因此我們將平移量錯開以重組牌組。以與基礎牌相同的數字 4 來說，平移量為 {0, 2, 0, 2}，若平移量相等，將與數 2 的平移量相等，所產生的數字會重複，故平移量不能相等。因此我們將 C 列及 D 列的平移量錯開

基礎牌相同數字	2	3	4	5
平移量	0	0	0	0
	0	1	0	3
	0	2	4=移 0 → 移 3	6=移 2 → 移 1
	0	3	6=移 2 → 移 1	9=移 1 → 移 2

但是將平移量錯開之後的牌組仍然會違反哆寶規，於是我們重新製圖，

觀察平移量的影響，結果發現光以平移無法完全錯開所有圖案。首先 A 列及 B 列維持平移法製作方式，之後將剩下牌列中的圖案大小錯置，(以



n=5 為例:圖八)，最後將代表圖案的數字填入，製作成環狀圖，即可完成跟平移法相同 m 及 p 的牌組。

(三)作品出處:中華民國第 56 屆中小學科學展覽會國小組數學科 作品名

稱:哆寶喜歡捉迷藏 特色:用矩形排列法用逐一討論的方式製作填卡，用傳統的刪去法一一對應填入比較耗時。且填入後如果有任兩張卡片相同的數字(圖案)出現兩個以上較不容易發現(沒有錯誤驗證)

參、研究過程與方法

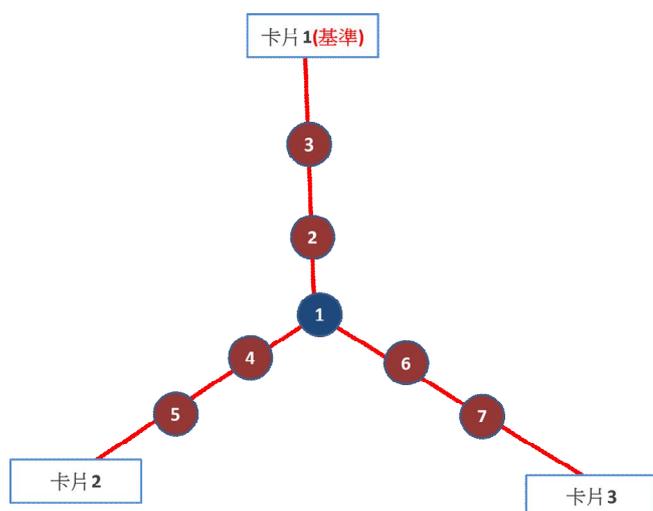
一、點線法

依照正版哆寶設計法，當每張圖卡上有 n 個圖案，則要完成整副牌組需要用 m 個圖案及總張數 p 。 m 和 p 與 n 的關係式為總卡片數 $p = n(n-1)+1 =$ 總圖案數 $m = n+(n-1)(n-1)$ 有別於如其他的牌組設計法先固定卡片，我們改成先固定圖案再排列卡片

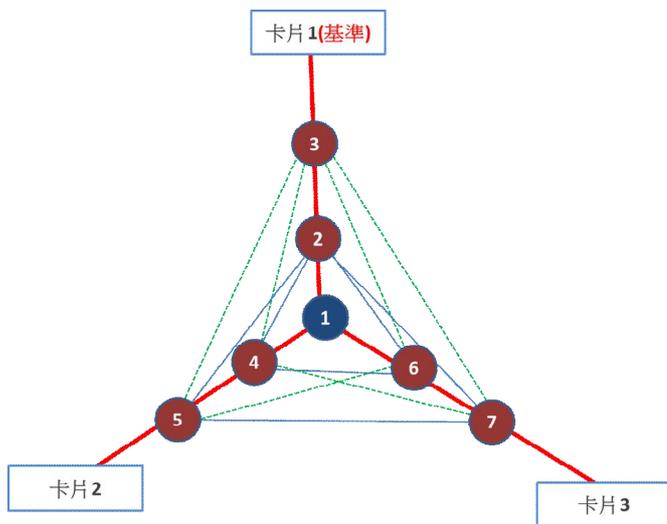
(一)每張圖卡有三個圖案(當 $n=3$)

當 $n=3$ 時要形成牌組會用到 $3+(3-1)(3-1)=7$ 個圖案(數字)，我們將

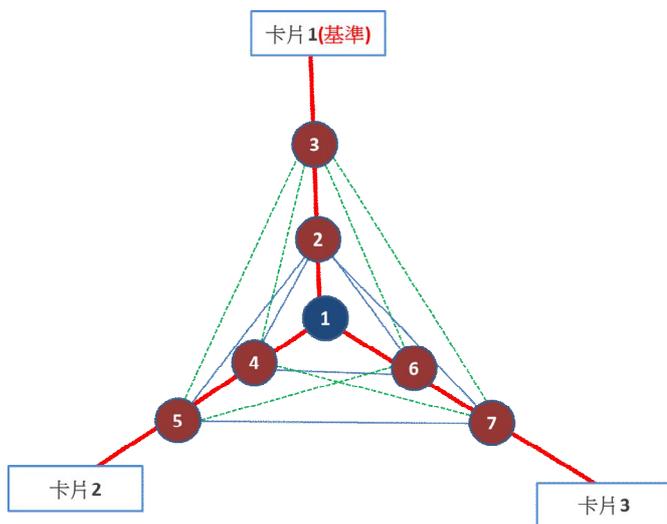
這 7 個數字排列如下



步驟一:以 1 為中心點。若每張圖卡的圖案為三個則以 1 為中心點畫三條直線，每條直線上有三個數字分別為(1.2.3)、(1.4.5)、(1.6.7)則每形成一直線即為一張卡，所以已經形成三張卡片
卡片 1(1.2.3)、卡片 2(1.4.5)、
卡片 3(1.6.7)



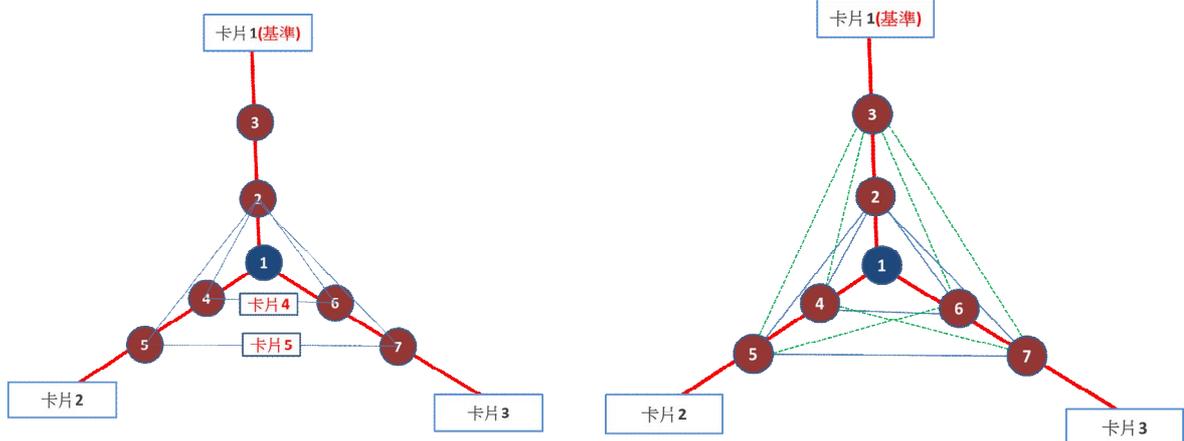
步驟二:以 2 為唯一共頂點與其他二條線連點(2.4.6) (2.5.7)
 每一個以 2 為起點並以 2 為終點的封閉環，不能有其他交點(若有其他交點代表兩張卡片會除了 2 之外再重複其他數字)
 卡片 4 及卡片 5 分別與卡片 1、卡片 2、卡片 3 交於一點(重複一個圖案)。而卡片 4 和卡片 5 重複圖案(數字 2)



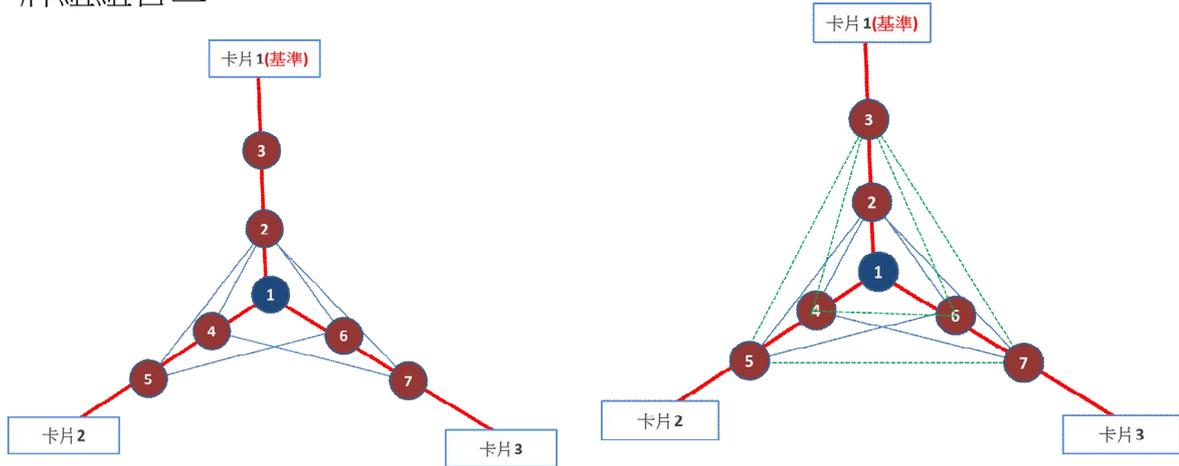
步驟三:以 3 為唯一共頂點與其他二條線連點(3.4.7) (3.5.6)
 枝幹為紅線，以 2 為首的封閉環為藍線，以 3 為首的封閉環為綠線。綠環和藍環不能有任何一條線段重複(線段重複即代表這兩張圖卡重複兩個圖案(數字)。每三點一環都是一張圖卡。

每一條主幹及每一條封閉環都代表一張圖卡，所以這 7 張圖卡分別為
 卡片 1 (1.2.3)、卡片 2 (1.4.5)、卡片 3 (1.6.7)、卡片 4 (2.4.6)、卡片 5 (2.5.7)
 卡片 6 (3.4.7)、卡片 7 (3.5.6)

牌組組合一



牌組組合二



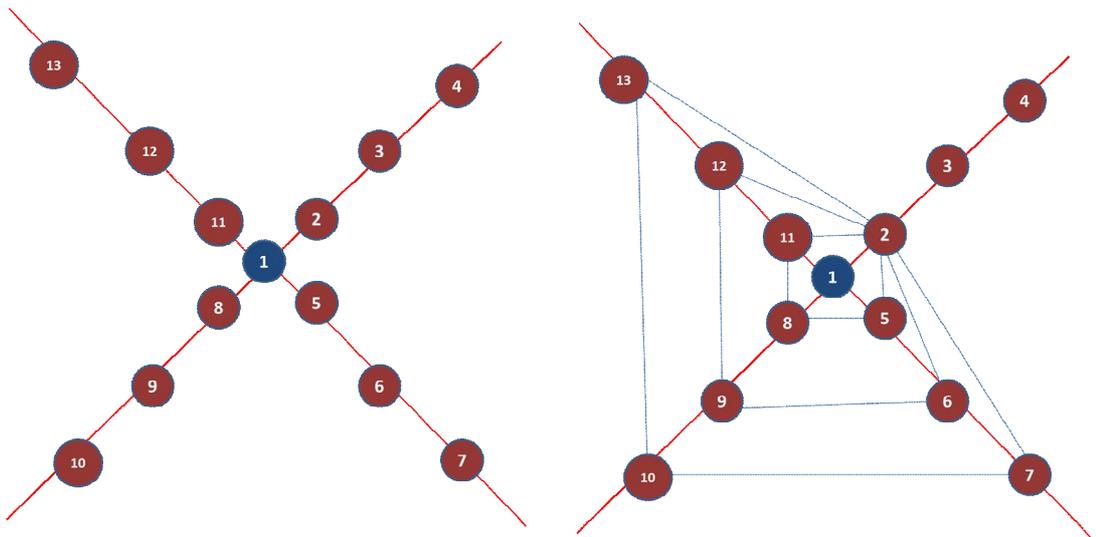
卡片 4 (2.5.6)、卡片 5 (2.4.7)、卡片 6 (3.4.6)、卡片 7 (3.5.7)

(二)每張圖卡有四個圖案(當 $n=4$)

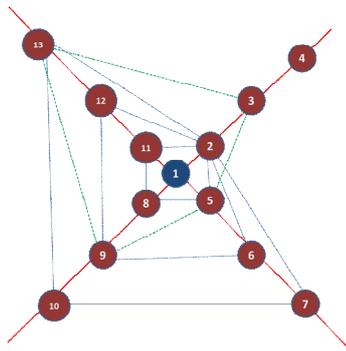
當 $n=4$ 時要形成牌組會用到 $4+(4-1)(4-1)=13$ 個圖案(數字)，我們將這 13 個數字排列如下，並依步驟完成所有封閉環(牌組圖卡)

步驟一:訂定中心點 1 及主枝幹
(1.2.3.4)(1.5.6.7)(1.8.9.10)(1.11.12.13)

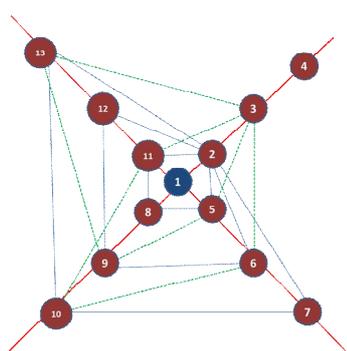
步驟二:訂定以 2 為首的封閉環
(2.5.8.11)(2.6.9.12)(2.7.10.13)



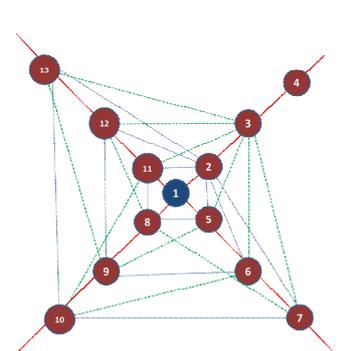
步驟三:訂定以 3 為首的封閉環(綠線與藍線任兩線段不共線)



卡片 (3.5.9.13)

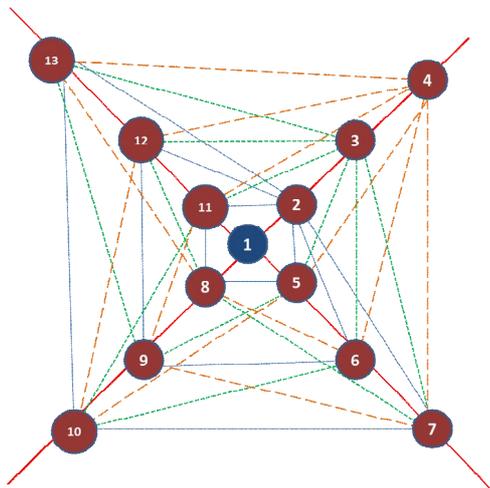


卡片 (3.6.10.11)

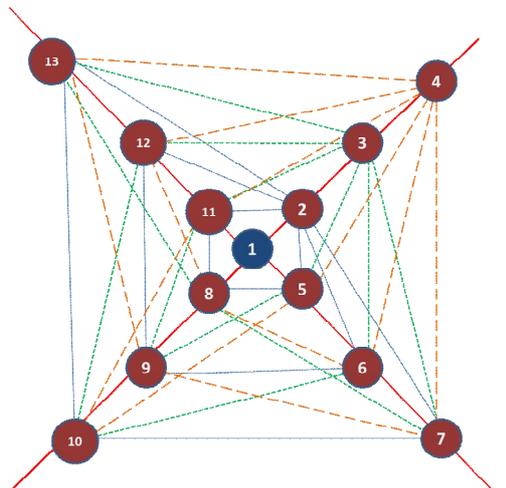


卡片 (3.7.8.12)

步驟四:訂定以 4 為首的封閉環(方法 1)

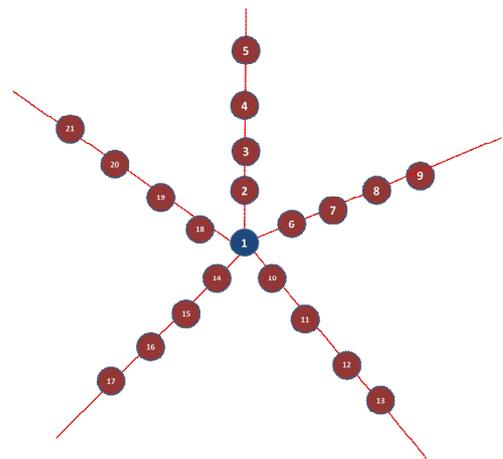


步驟四:訂定以 4 為首的封閉環(方法 2)

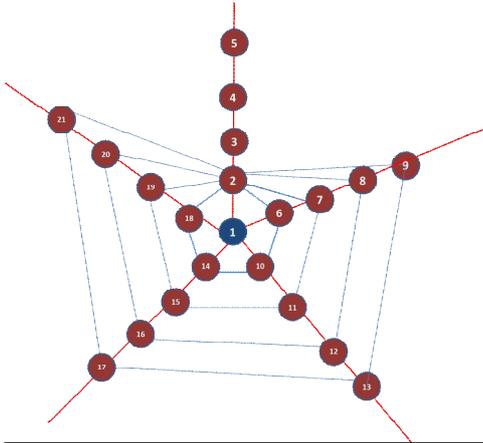


(三)每張圖卡有五個圖案(當 $n=5$)

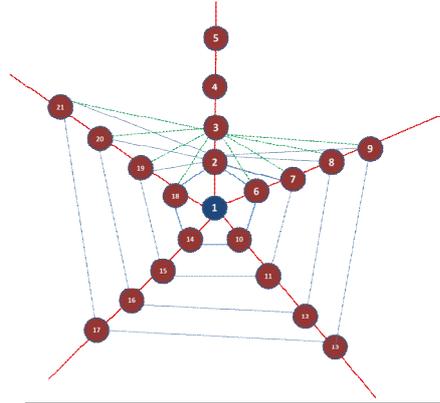
當 $n=5$ 時要形成牌組會用到 $5+(5-1)(5-1)=21$ 個圖案(數字)，我們將這 21 個數字排列如右，並依步驟完成所有封閉環(牌組圖卡)。



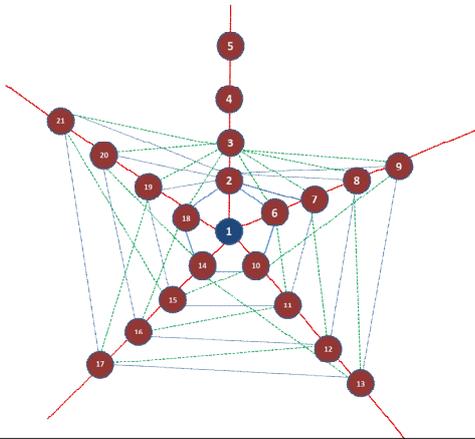
步驟一:定中心點及五枝幹



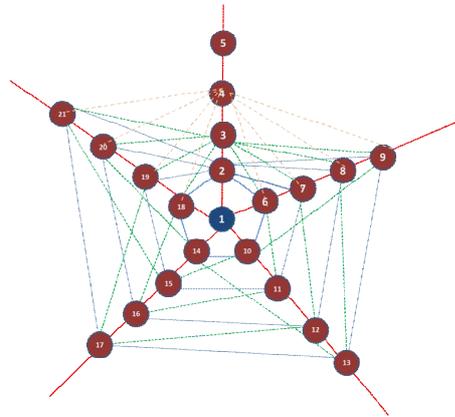
步驟二:以 2 為首形成四個相異封閉環



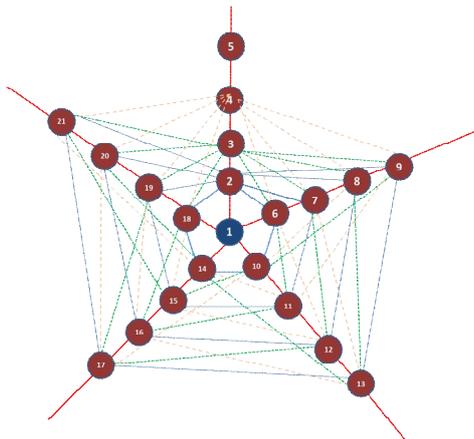
步驟三:以 3 為首先連頭尾兩枝幹



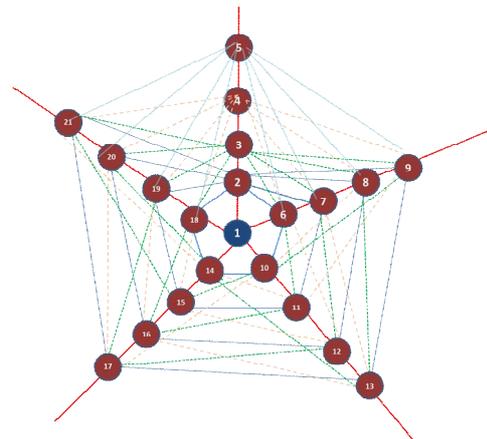
步驟四:完成以 3 為首的四個相異封閉環



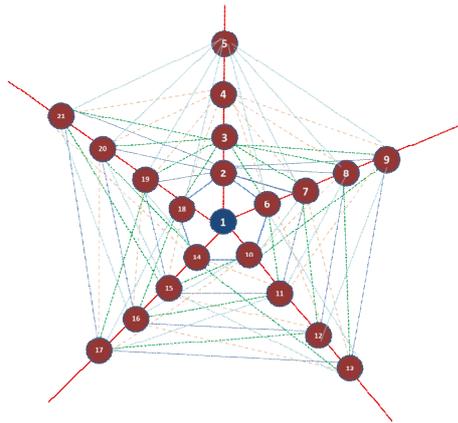
步驟五:以 4 為首先連頭尾兩枝幹



步驟六:完成以 4 為首的四個相異封閉環



步驟七:以 5 為首先連頭尾兩枝幹

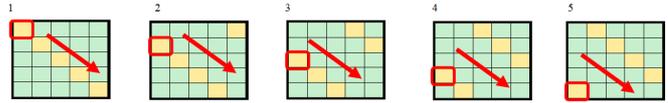


步驟八:完成以 5 為首的四
個相異封閉環

因為在所有的封閉環中任兩條線段都不可以重複，當數字大的時候容易錯亂，所以當我們以 2.3.4.5 為首作封閉環時發現可以先連頭尾枝幹，然後中間枝幹開始交錯即可。由以上架構可知:

- (1)只要把一個數字放中心點，接著開始平均 n 個枝幹。所以也可以將最後一個數字放在中心點位置，然後數字倒數回去平分在每一個枝幹
- (2)每張卡片有 n 個圖案，所以分成 n 個枝幹。我們以第一個主枝幹為封閉環的起點與終點，事實上我們也可以以其他枝幹作為封閉環的起點與終點。
- (3)要完成每張牌有 n 個圖案，每張牌之間恰只有一個圖案相同(數字)，的牌組雖然總圖案數 m 和總張數 p 都相同，但是其中個別圖卡圖案組成的方式是可以有多種組合方式的。用點線法當線段有重複時我們馬上可以知道找錯圖卡了，因為重複的數字(圖案)有兩個，是一個馬上就可以驗證是否有錯的方法。但是當數字一多要連的線段錯綜複雜，很不容易製作整理，因此我們開始想用點線法的概念但是把資料表格化。

4.發現紅框內的每一小格的數字排列樣式皆出自右圖

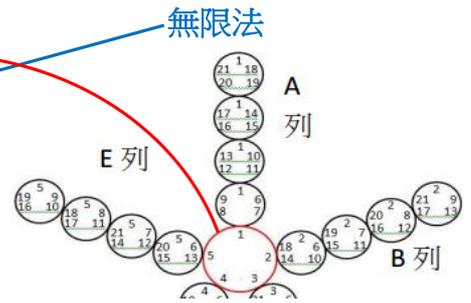


卡片序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
卡片1	1																														
卡片2	1					7	8	9	10	11																					
卡片3	1											12	13	14	15	16															
卡片4	1																17	18	19	20	21										
卡片5	1																					22	23	24	25	26					
卡片6	1																										27	28	29	30	31
卡片7	2					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片8	2					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片9	2					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片10	2					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片11	2					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片12	3					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片13	3					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片14	3					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片15	3					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片16	3					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片17	4					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片18	4					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片19	4					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片20	4					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片21	4					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片22	5					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片23	5					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片24	5					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片25	5					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片26	5					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片27	6					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片28	6					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片29	6					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片30	6					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30
卡片31	6					7	8	9	10	11		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		22	23	24	25	26	27	28	29	30

(二)表格牌組特色:在下圖中粉紅基準列上的每個數字的都畫上一個小紅圈,每張卡片僅能有一小紅圈,如果一張卡片有兩個,那張卡片就會與粉紅基準行(卡片【13】)有兩個相同的圖案。如果一張卡片一格紅圈都沒有,那就代表那張卡片沒有圖案是與粉紅基準行(卡片【13】)一樣的。(此為本研究後部的重點依據)

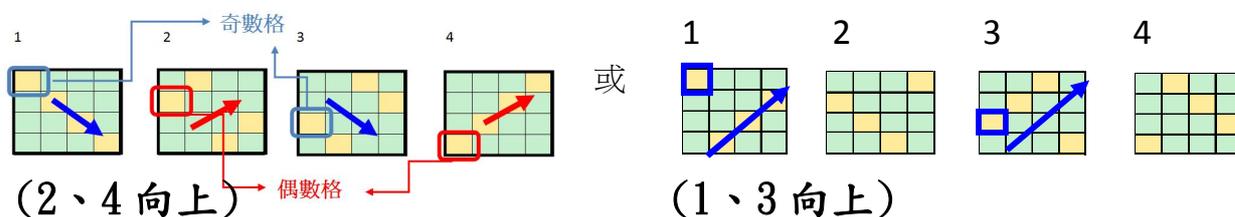
三.錯置法表格化

卡片序	圖案序																														
卡片1	1	2	3	4	5																										
卡片2	1					6	7	8	9																						
卡片3	1									10	11	12	13																		
卡片4	1													14	15	16	17														
卡片5	1																18	19	20	21											
卡片6	2					6				10				14			18														
卡片7	2					7				11				15			19														
卡片8	2					8				12				16			20														
卡片9	2					9				13				17			21														
卡片10	3				6					11				16			21														
卡片11	3				7					10				17			20														
卡片12	3				8					12				18			21														
卡片13	3				9					13				19			21														
卡片14	4			6						12				17			20														
卡片15	4			7						13				18			21														
卡片16	4			8						15				21			21														
卡片17	4			9						11				14			20														
卡片18	5			5	6					13				15			20														
卡片19	5			5	7					12				14			21														
卡片20	5			5	8					11				17			18														
卡片21	5			5	9	10				16				19			21														



卡片序	圖案序																														
卡片1	1	2	3	4	5																										
卡片2	1					6	7	8	9																						
卡片3	1									10	11	12	13																		
卡片4	1													14	15	16	17														
卡片5	1																18	19	20	21											
卡片6	2					6				10				14			18														
卡片7	2					7				11				15			19														
卡片8	2					8				12				16			20														
卡片9	2					9				13				17			21														
卡片10	3				6					11				16			21														
卡片11	3				7					10				17			20														
卡片12	3				8					12				18			21														
卡片13	3				9					13				19			21														
卡片14	4			6						12				17			20														
卡片15	4			7						13				18			21														
卡片16	4			8						15				21																	

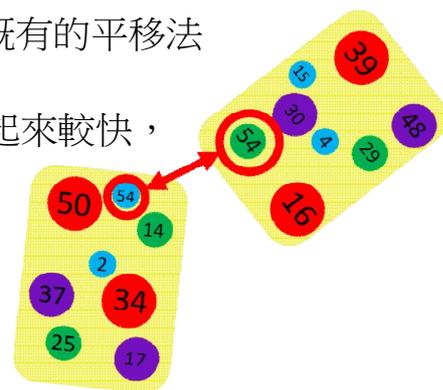
我們將錯置法五種圖案製成表格，發現因其將平移量錯開以避免任 2 張有多種重複的數字，所以紅框內的數字排列樣式與環狀法有些差異，樣式 2、4 並非如環狀法向下延伸，而是向上。後經過實測找尋是否也有其他樣式可得到相同效果，除了上述的 1、3 向下，2、4 向上外，還有一種方法就是改變第 1、3 樣式為向上第 2、4 樣式向下。此舉也可錯開重複的數字，但若用其他改變方法皆無法成功錯開。最後定義不同於環狀法的樣式 1、2、3、4。



肆、結果與討論

我們綜合了平移法和錯置法表格化研發出了車廂法。以下將會介紹車廂法和用車廂法製做出任兩張卡有 k 種圖案重複卡牌的方法。下文我們先介紹其特色

- 一、車廂法(任兩張卡有 1 種圖案重複):從參考文獻上既有的平移法和錯置法進化而成。相較平移法和錯置法，製作起來較快，也能快速驗證牌組是否有誤



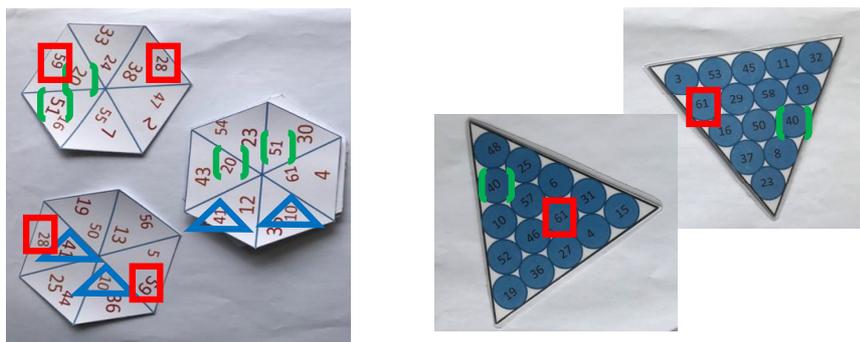
牌組如右圖

- 二、車廂法(任兩張卡有兩種以上的圖案重複):我們將

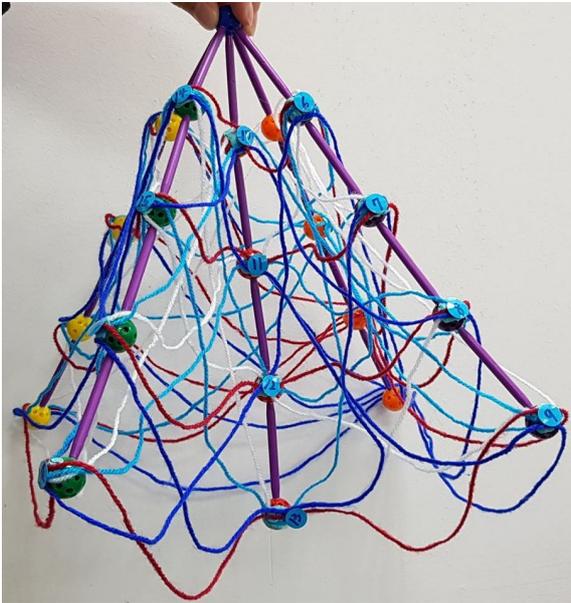
多個車廂結

合所做出

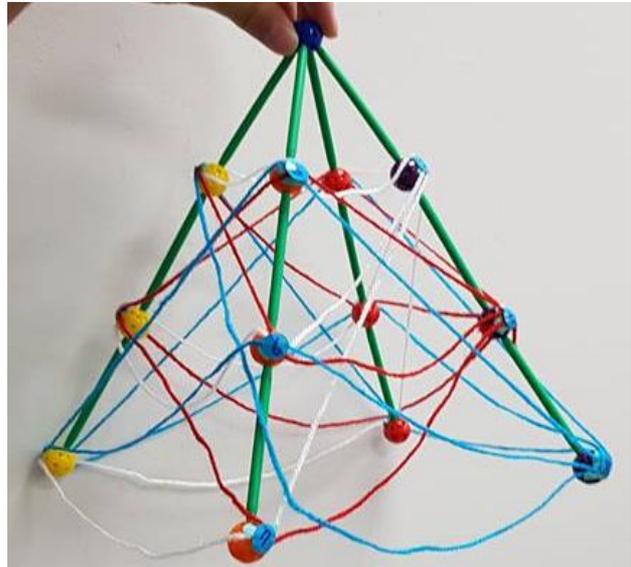
結果(右圖)



三.點線法模型:我們用點線法製成模型，如下



1 張卡 5 種圖案



1 張卡 4 種圖案

※詳細製作方法:

一.車廂法(N-1 為質數)。由於平移法製作起來極慢，所以我們利用平移法製成表格後的特性快速製作不同牌組。

步驟一(根據平移法公式)

卡片	1	2	3	4	5	6
卡片1	1					
卡片2	1	1				
卡片3	1	2				
卡片4	1	3				
卡片5	1	4				
卡片6	1	5				
卡片7	2					
卡片8	2	2				
卡片9	2	3				
卡片10	2	4				
卡片11	2	5				
卡片12	3					
卡片13	3	3				
卡片14	3	4				
卡片15	3	5				
卡片16	4					
卡片17	4	4				
卡片18	4	5				
卡片19	4	6				
卡片20	4	7				
卡片21	4	8				
卡片22	5					
卡片23	5	5				
卡片24	5	6				
卡片25	5	7				
卡片26	5	8				
卡片27	6					
卡片28	6	6				
卡片29	6	7				
卡片30	6	8				
卡片31	6	9				

1.如果卡片一張要有 N 種圖案，N-1 為質數，則除基準卡卡片 1 以外，每 N-1 張卡設為一組

2.將卡片 1 作為基準卡以 N-1(6-1=5)張卡片作為一組，共分成 N(6)組。然後使各組皆有一種圖案(數字)重複

步驟二

無限法向橫向外延伸 N-1 組(橫向共 6 組)

卡片	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
卡片1	1																														
卡片2	1	1																													
卡片3	1	2																													
卡片4	1	3																													
卡片5	1	4																													
卡片6	1	5																													
卡片7	2																														
卡片8	2	2																													
卡片9	2	3																													
卡片10	2	4																													
卡片11	2	5																													
卡片12	3																														
卡片13	3	3																													
卡片14	3	4																													
卡片15	3	5																													
卡片16	4																														
卡片17	4	4																													
卡片18	4	5																													
卡片19	4	6																													
卡片20	4	7																													
卡片21	4	8																													
卡片22	5																														
卡片23	5	5																													
卡片24	5	6																													
卡片25	5	7																													
卡片26	5	8																													
卡片27	6																														
卡片28	6	6																													
卡片29	6	7																													
卡片30	6	8																													
卡片31	6	9																													

步驟三

將卡片【7】-【11】用樣式 1、2、3、4、5(參考 P14 第 4 點)隨意組合(可重)，並隨意取一張卡作為這組的基準行，在基準行上有數字的地方上下延伸劃出基準列，並選一列為重複列(紫色)，完成卡片【1】-【11】(下圖)

三.車廂法(N-1 不為質數)。由於錯置法製作起來極慢，所以我們利用錯置法製成表格後的特性快速製作不同牌組。

卡片1	1	2	3	4	5															
卡片2	1					6	7	8	9											
卡片3	1									10	11	12	13							
卡片4	1													14	15	16	17			
卡片5	1																18	19	20	21
卡片6		2																		
卡片7		2																		
卡片8		2																		
卡片9		2																		
卡片10			3																	
卡片11			3																	
卡片12			3																	
卡片13			3																	
卡片14				4																
卡片15				4																
卡片16				4																
卡片17				4																
卡片18					5															
卡片19					5															
卡片20					5															
卡片21					5															

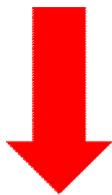
(1) 將卡片 1 作為基準卡以 $n-1(5-1=4)$ 張卡片作為一組共分成 $n(5)$ 組，然後各組固定一種圖案(一個數字) 如左圖。再以無限法將第一組的卡片 2-6 向外延伸 $n-1$ 組如左圖

(2) 先在卡片 6 到卡片 9 之間，任選 1 行(橫為行)作為基準，以樣式 1、2、3、4(錯製法的特殊樣式 P14)，隨意組合。(下圖)

卡片1	1	2	3	4	5															
卡片2	1					6	7	8	9											
卡片3	1									10	11	12	13							
卡片4	1													14	15	16	17			
卡片5	1																18	19	20	21
卡片6		2				6						13		16		19				
卡片7		2						9	10				15					20		
卡片8		2						8		11			14							21
卡片9		2					7				12					17	18			

卡片1	1	2	3	4	5															
卡片2	1					6	7	8	9											
卡片3	1									10	11	12	13							
卡片4	1													14	15	16	17			
卡片5	1																18	19	20	21
卡片6		2				6						13		16		19				
卡片7		2						9	10				15					20		
卡片8		2						8		11			14							21
卡片9		2					7				12					17	18			
卡片10			3								13							20		
卡片11			3															19		
卡片12			3			6														
卡片13			3									16					18			21
卡片14				4																
卡片15				4																
卡片16				4																
卡片17				4																
卡片18					5															
卡片19					5															
卡片20					5															
卡片21					5															

(3) 依基準行 1 的數字往下延伸黃色色塊，在黃色色塊的直列中選定一列重複列(紫色)，待會在其列與的 2 基準行的交界處填上數字，做為基準行間為一重複的圖案。然後在卡片 10 到卡片 13 任選一行作為基準行 2(紅)，並依規則:【基準行的數字不會通過其他基準列、圖中的藍色框不得在同一行上(參考 P14)】再依照錯製法的特殊樣式將卡片 10 到 13 的車廂填入。(左圖、下圖)



卡片1	1	2	3	4	5																
卡片2	1					6	7	8	9												
卡片3	1									10	11	12	13								
卡片4	1													14	15	16	17				
卡片5	1																	18	19	20	21
卡片6		2				6						13			16			19			
卡片7		2						9	10					15						20	
卡片8		2					8			11			14								21
卡片9		2					7				12					17	18				
卡片10			3				8					13				17				20	
卡片11			3				7			10			14						19		
卡片12			3				6				11			15			18				
卡片13			3					9			12				16						21

(4)在將卡片【14】-【17】的第5車廂(重複列)數字填入

卡片1	1	2	3	4	5																	
卡片2	1					6	7	8	9													
卡片3	1									10	11	12	13									
卡片4	1													14	15	16	17					
卡片5	1																	18	19	20	21	
卡片6		2				6						13			16			19				
卡片7		2						9	10					15						20		
卡片8		2					8			11			14								21	
卡片9		2					7				12					17	18					
卡片10			3				8					13				17				20		
卡片11			3				7			10			14						19			
卡片12			3				6				11			15			18					
卡片13			3					9			12				16							21
卡片14				4																	21	
卡片15				4													18					
卡片16				4													19					
卡片17				4														20				

(5) 在卡片 14 卡片 17 選一行作為基準行 3(黃)，並依規則:【基準行的數字不會通過其他基準列、圖中的同色色框不得在同一行上(參考 P14)】再依照錯製法的特殊樣式將卡片 14 到 17 的車廂填入。(上圖)

卡片14				4		6				10						17					21
卡片15				4					9				13	14			18				
卡片16				4					8				12		15				19		
卡片17				4			7			11					16						20

卡片1	1	2	3	4	5																	
卡片2	1					6	7	8	9													
卡片3	1									10	11	12	13									
卡片4	1													14	15	16	17					
卡片5	1																	18	19	20	21	
卡片6		2				6						13			16			19				
卡片7		2						9	10					15						20		
卡片8		2					8			11			14								21	
卡片9		2					7				12					17	18					
卡片10			3				8					13				17				20		
卡片11			3				7			10			14						19			
卡片12			3				6				11			15			18					
卡片13			3					9			12				16							21
卡片14				4			6			10						17						21
卡片15				4				9					13	14			18					
卡片16				4				8				12		15				19				
卡片17				4			7			11					16							20
卡片18					5		8			10					16		18					
卡片19					5		7					13	15									21
卡片20					5	6					12		14									20
卡片21					5			9		11						17	19					

經過繼續的推導
最終完成圖如左圖
(樣式 1、3 向上)

四.我們開始思考如何運用車廂法設計出任兩張牌恰好有 2 個圖案(數字)相同，任兩張牌恰好有 3 個圖案(數字相同)。而哆寶牌的玩法除了遊戲設計訓練觀察力以及速度和眼力之外，是否有其他的玩法?

(一)車廂法哆寶牌組設計法(任兩張牌恰好有 2 個圖案數字相同)

1 取兩分【一張卡片四種圖案，任兩張卡兩個相同】的完成圖(不一定要同一款式)。分別定義為片【完成圖 1】，與【完成圖 2'】

卡片1	1	2	3	4									
卡片2	1				5	6	7						
卡片3	1							8	9	10			
卡片4	1										11	12	13
卡片5	1	2									10	11	12
卡片6	1	2										12	13
卡片7	1	2										11	12
卡片8	1	2										10	11
卡片9	1	2										11	12
卡片10	1	2										12	13
卡片11	1	2										11	12
卡片12	1	2										12	13
卡片13	1	2										12	13

卡片1'	1	2	3	4									
卡片2'	1				5	6	7						
卡片3'	1							8	9	10			
卡片4'	1										11	12	13
卡片5'	1	2									10	11	12
卡片6'	1	2										12	13
卡片7'	1	2										11	12
卡片8'	1	2										10	11
卡片9'	1	2										11	12
卡片10'	1	2										12	13
卡片11'	1	2										11	12
卡片12'	1	2										12	13
卡片13'	1	2										12	13

2 將兩份完成圖排列對齊。且由於【完成圖 1】的最大數字是 13，所將將【完成圖 2'】的數字全部加 13，讓這兩份完成圖的數字錯開，互不干擾。並將【完成圖 2'】的卡片'與【完成圖 1】的卡片結合，完成。

卡片1	1	2	3	4										卡片1'	14	15	16	17									
卡片2	1				5	6	7							卡片2'	14				18	19	20						
卡片3	1							8	9	10				卡片3'	14							21	22	23			
卡片4	1										11	12	13	卡片4'	14									24	25	26	
卡片5	1	2												卡片5'	15				18					23	24	25	26
卡片6	1	2												卡片6'	15				19					24	25	26	
卡片7	1	2												卡片7'	15				19					24	25	26	
卡片8	1	2												卡片8'	15				19					24	25	26	
卡片9	1	2												卡片9'	16				20					25	26		
卡片10	1	2												卡片10'	16				20					25	26		
卡片11	1	2												卡片11'	16				20					25	26		
卡片12	1	2												卡片12'	17	18			21					24	25	26	
卡片13	1	2												卡片13'	17	18			21					24	25	26	

※將原本完成圖 2'的數字都加 13

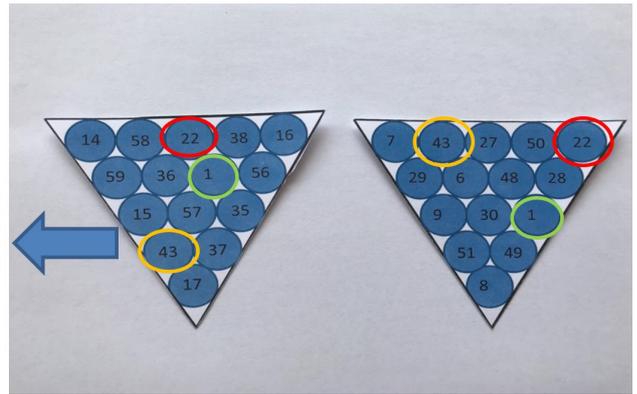
完成圖 1 ↓ 完成圖 2'

卡片1	1	2	3	4										卡片1'	14	15	16	17									
卡片2	1				5	6	7							卡片2'	14				18	19	20						
卡片3	1							8	9	10				卡片3'	14							21	22	23			
卡片4	1										11	12	13	卡片4'	14									24	25	26	
卡片5	1	2												卡片5'	15				18					23	24	25	26
卡片6	1	2												卡片6'	15				19					24	25	26	
卡片7	1	2												卡片7'	15				19					24	25	26	
卡片8	1	2												卡片8'	16				20					25	26		
卡片9	1	2												卡片9'	16				20					25	26		
卡片10	1	2												卡片10'	16				20					25	26		
卡片11	1	2												卡片11'	17	18			21					24	25	26	
卡片12	1	2												卡片12'	17	18			21					24	25	26	
卡片13	1	2												卡片13'	17	18			21					24	25	26	

(三)、哆寶卡新玩法設計及圖卡實例

1.兩人(三角形)

- (1)先隨意抽取一張卡片作為基準卡
- (2)每人各擁有 10 張卡片，輪流丟出一張卡，與基準卡比較。

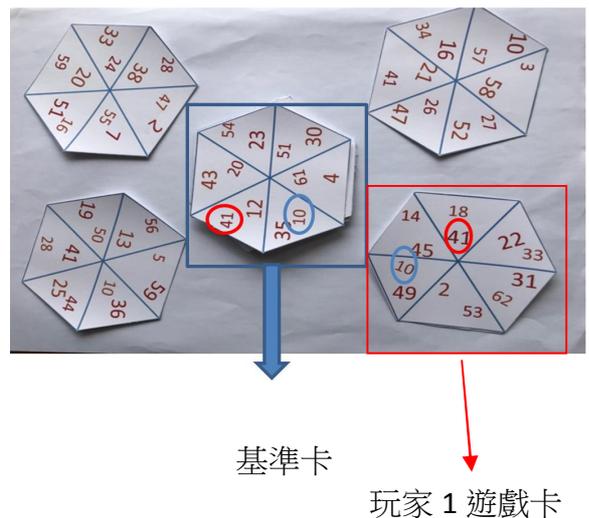


(3)將與基準卡同樣的三個數字依照規則計算(最大-最小+次)Ex:43-1+22=64。

- (4)計算最快且正確地得到原先的基準卡，並將剛剛玩家所丟出的卡做為新的基準卡，繼續遊戲。遊戲結束時得到最多牌的即為勝利者

2.多人(六邊形)

- (1)每人剛開始都擁有一張卡片，(遊戲卡)其餘的作為每回合的基準卡
- (2)每回合抽取一張基準卡片
- (3)最快找出自己的卡與基準卡重複的兩個數字就可得到那張基準卡片並取代原本的



遊戲卡將原本的遊戲卡放在一旁,累積最多卡片者即為勝利者。註:可依玩家喜好選擇玩法

A:將兩數相加 EX:41+10=51(喊出 51 即為當回合勝利者)

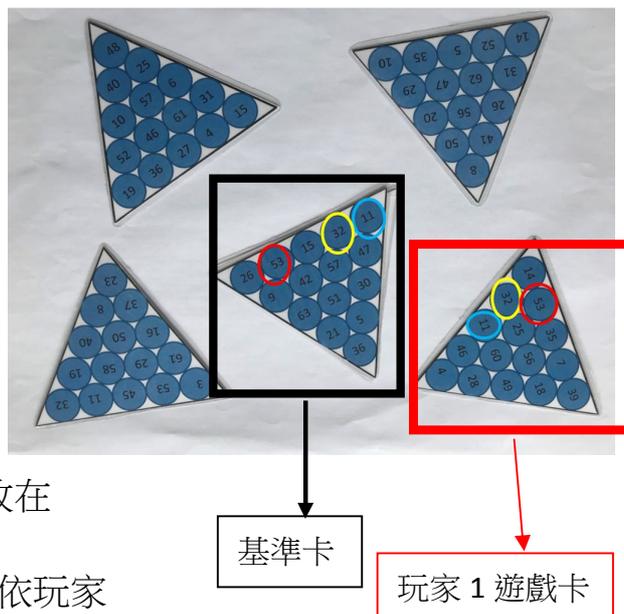
B:將兩數相減 EX:41-10=31(喊出 31 即為當回合勝利者)

C:將兩數相乘 EX:41*10=410(喊出 410 即為當回合勝利者)

D:將兩數相除尋找餘數 EX:41/10=4...1(喊出 1 即為當回合勝利者)

3.多人(三角形)

(1)每人剛開始都擁有一張卡片,其餘的作為基準卡 (2)基準卡每回合抽取一張卡片 (3)找出與基準卡相同的三個數字並且將其加起來,最快且正確者即能得到基準片並取代原本的遊戲卡將原本的遊戲卡放在一旁,累積最多即為勝利者。註:可依玩家



喜好選擇玩法: A:將三數相乘

B:三數運算:大數-中數+小數

C:三數運算: (大數-中數) \times 小數

伍、結論

一、每張圖案數及總圖案數與總張數的關係式，以下討論我們假設

每張卡出現 n 個圖案，一副牌卡出現所有的總圖案數為 m ，總共有 p 張牌

(一)車廂法哆寶牌組設計法(任兩張牌恰好有一個圖案數字相同)

$$\text{總卡片數 } p = n(n-1)+1 = \text{總圖案數 } m = n+(n-1)(n-1) = n^2 - n + 1, m=p$$

(二)車廂法哆寶牌組設計法(任兩張牌恰好有 2 個圖案數字相同)

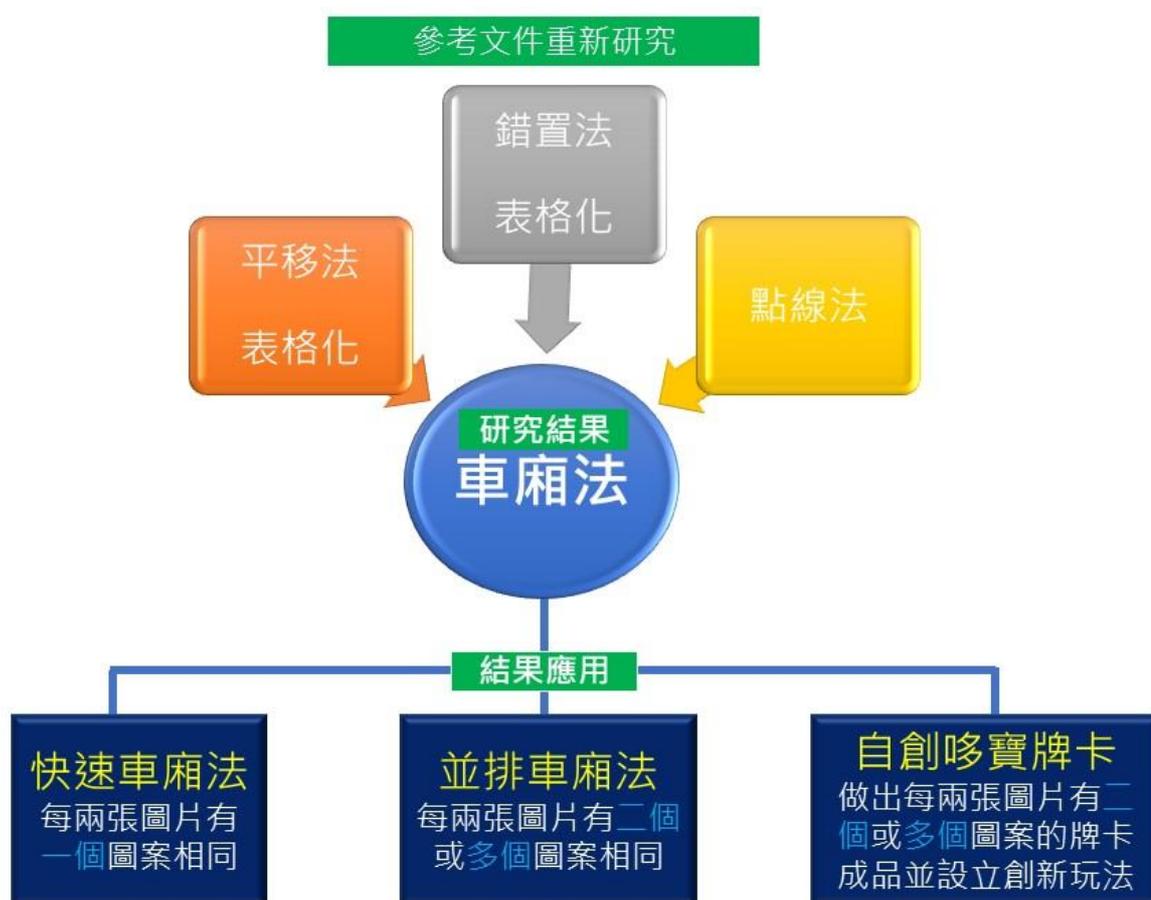
$$\text{總卡片數 } p = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) + 1, \text{總圖案數 } m = n \times \left(\frac{n}{2} - 1 \right) + 2, m=2p$$

(三)車廂法哆寶牌組設計法(任兩張牌恰好有 3 個圖案數字相同)

$$\text{總卡片數 } p = \frac{n}{3} \left(\frac{n}{3} - 1 \right) + 1, \text{ 總圖案數 } m = n \times \left(\frac{n}{3} - 1 \right) + 3, m = 3p$$

(四) 車廂法哆寶牌組設計法(任兩張牌恰好有 K 個圖案數字相同)

$$\text{總卡片數 } p = \frac{n}{k} \left(\frac{n}{k} - 1 \right) + 1, \text{ 總圖案數 } m = n \times \left(\frac{n}{k} - 1 \right) + k, m = kp$$



二.心得

由於在一次偶然的機會下接觸哆寶這個桌遊，激起了我們想一窺桌遊中數學奧秘的好奇心，一頭栽進了哆寶的世界裡。首先，我們先從製作牌組開始研究。我們創造了車廂法、點線法來製作牌組。不過由於點線法及車廂法製作較耗

時，引此我們蒐集了車廂法牌組的特性，做出了快速車廂法來加快製作牌組的速度。之後，我們心中浮出了一個疑問——為什麼任兩張卡只能有一個圖案(數字)重複呢?在老師的建議下，我們開始研究此問題並想出了辦法讓任兩張卡只能有兩個、三個甚至更多個圖案(數字)重複。原來只要把 K 個【任兩張卡有一個圖案(數字)重複的車廂法】的完成圖合併，並將其中每個完成圖的數字錯開，就是任【兩張卡有 K 個圖案(數字)重複】的牌組了。製作出任兩張卡有多個圖案(數字)重複的牌組後，我們為小學需要練習加減乘除的小朋友開發出了一些遊戲，那時，我才知道原來數學是這麼的好玩。最後，我們整理出了每張卡出現了 N 個圖案、整副牌組總共出現 M 種圖案、總共有 P 張牌、任兩張卡有 K 種圖案重複的關係式總卡片數 $p = \frac{n}{k}(\frac{n}{k}-1)+1$ ，總圖案數 $m = n \times (\frac{n}{k}-1) + K$ ， $m = kp$ 。經由這次的研究，我們了解數學的神奇之處也希望未來有更多機會去做類似的研究。

陸、參考文獻

- 一、顏偵毅(2015)。如何製作哆寶。
- 二、佚名(2015)。神奇桌遊—哆寶。金門地區第 55 屆中小學科學博覽會國小組數學科
- 三、鄔玟潔、謝宏昀、鍾佳欣(2016)。「哆」次的相遇——只有唯一，都是至「寶」。中華民國第 56 屆中小學科學展覽會高中組數學科
- 四、王傑宇、楊程光、黃羿愷、黃昱綺、趙翊喬 (2016)。哆寶喜歡捉迷藏。中華民國第 56 屆中小學科學展覽會國小組數學科

附件(完整圖卡)

一、每任兩張卡都會二種圖案重複

圖卡1

33	1	5
4	3	36
6	2	32
37	34	35

圖卡2

1	10	8
7	42	11
38	39	40
32	41	9

圖卡3

13	12	32
43	44	15
16	46	14
45	1	47

圖卡4

19	17	18
1	32	49
21	51	52
20	48	50

圖卡5

57	22	23
55	1	25
56	26	24
54	32	53

圖卡6

1	27	28
58	59	60
31	29	61
32	30	62

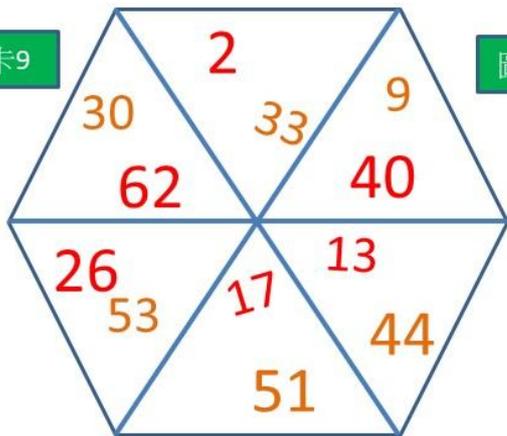
圖卡7

28	47	7
38	49	16
33	24	56
20	60	

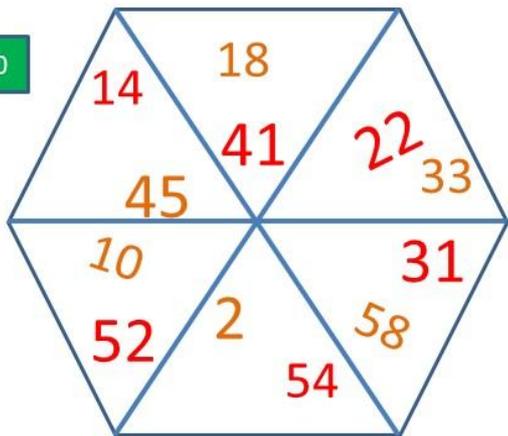
圖卡8

29	2	8
33	61	57
25	12	50
39	21	43

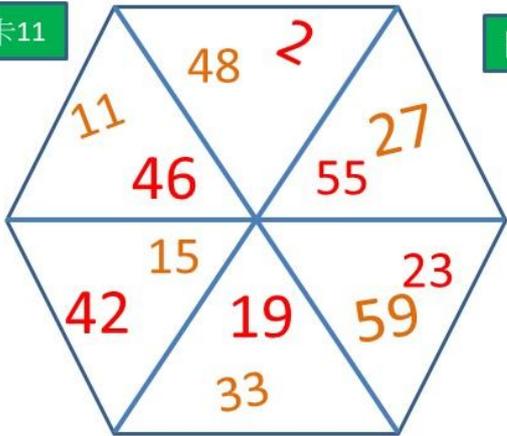
圖卡9



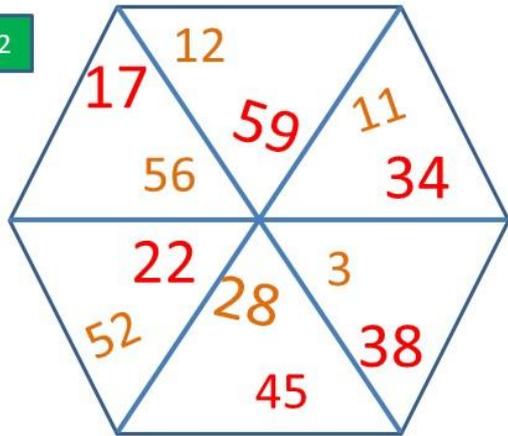
圖卡10



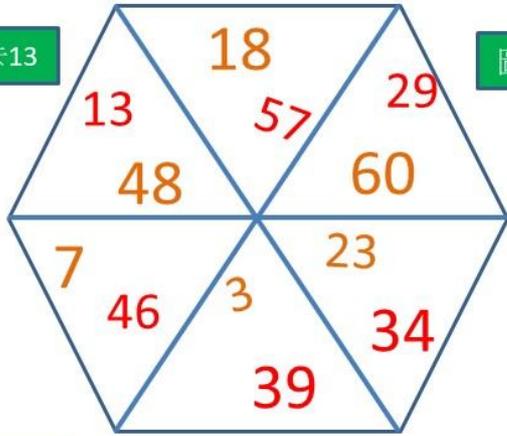
圖卡11



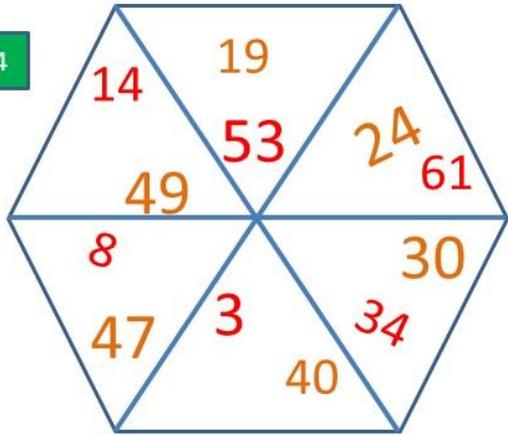
圖卡12



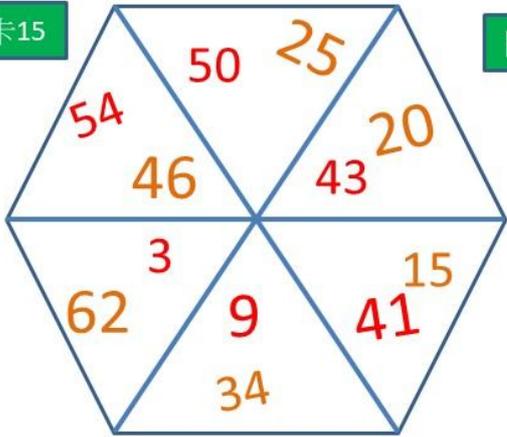
圖卡13



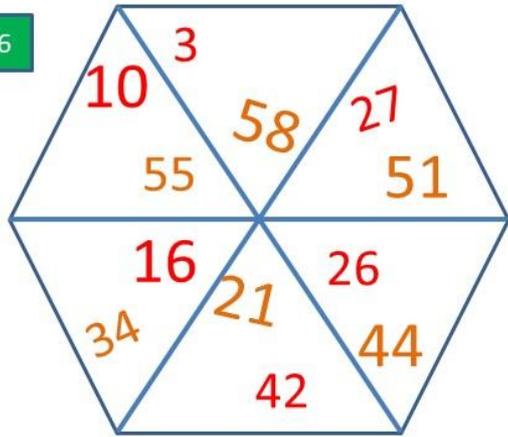
圖卡14



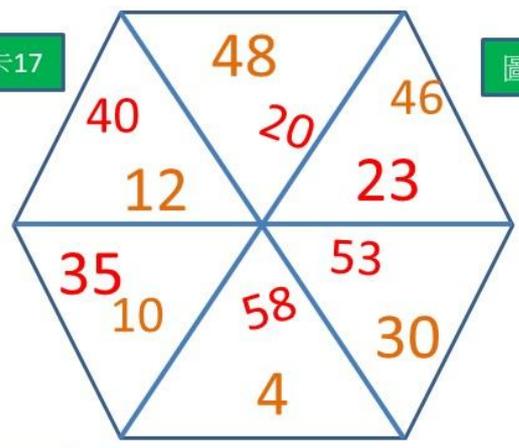
圖卡15



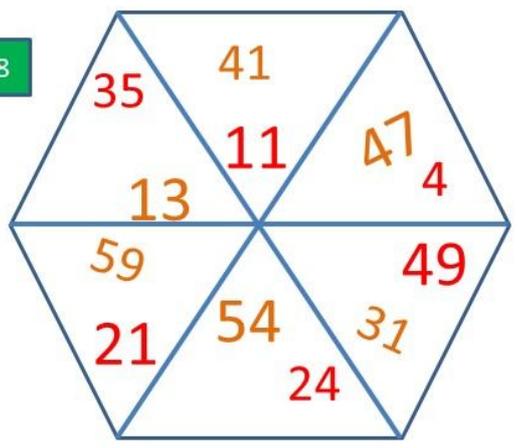
圖卡16



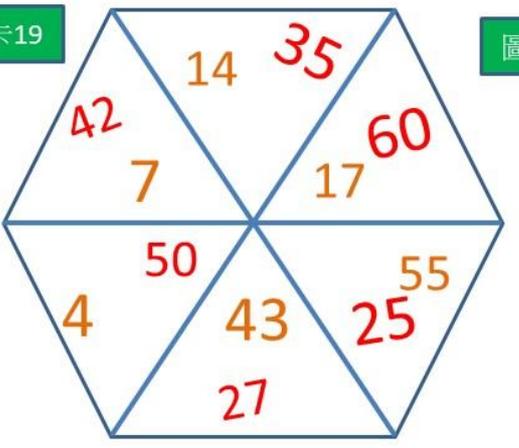
圖卡17



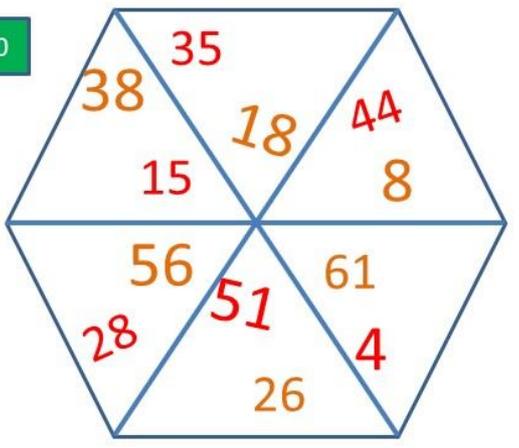
圖卡18



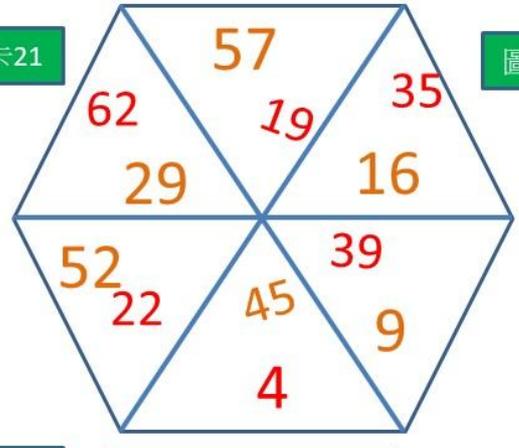
圖卡19



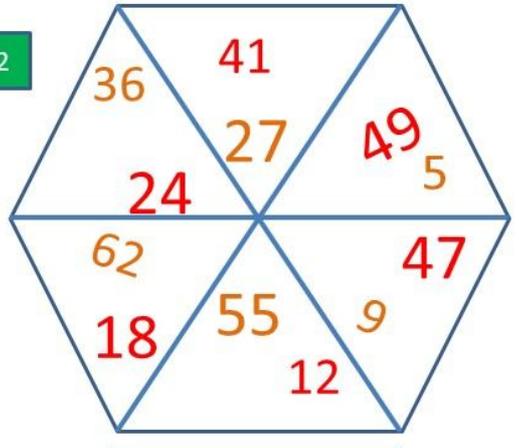
圖卡20



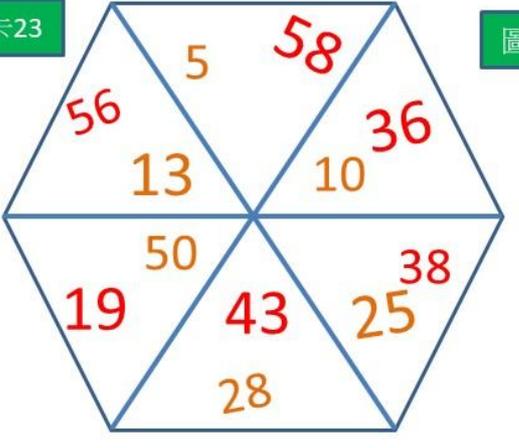
圖卡21



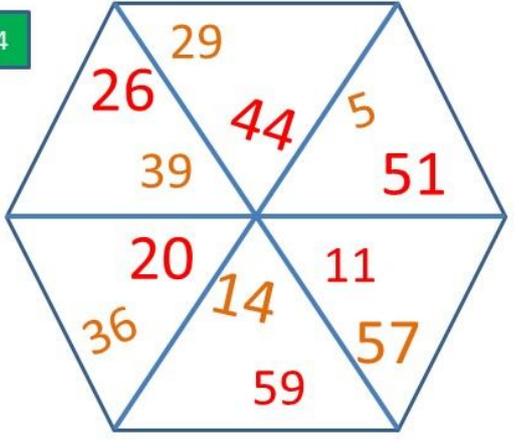
圖卡22



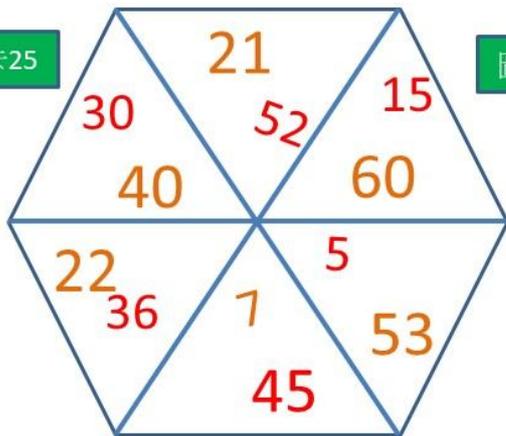
圖卡23



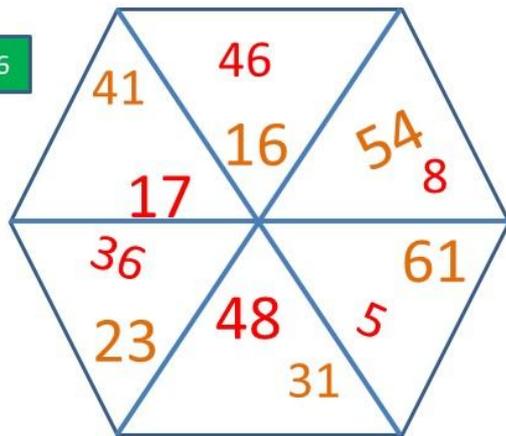
圖卡24



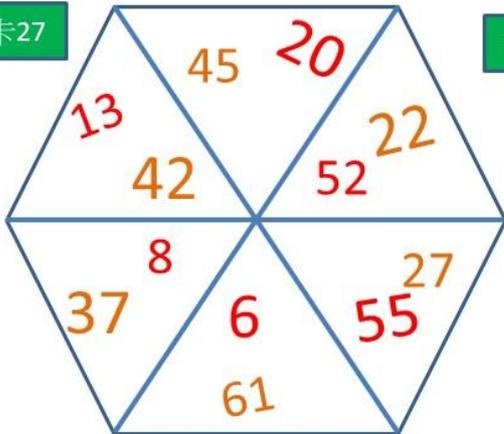
圖卡25



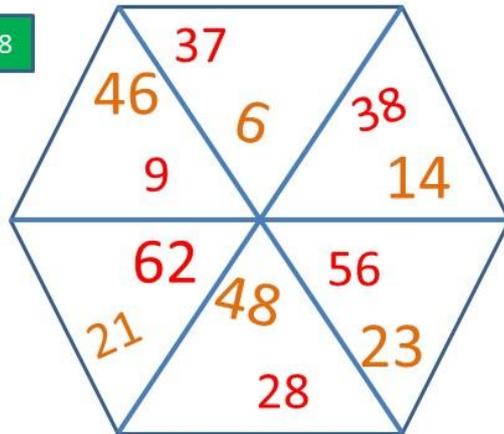
圖卡26



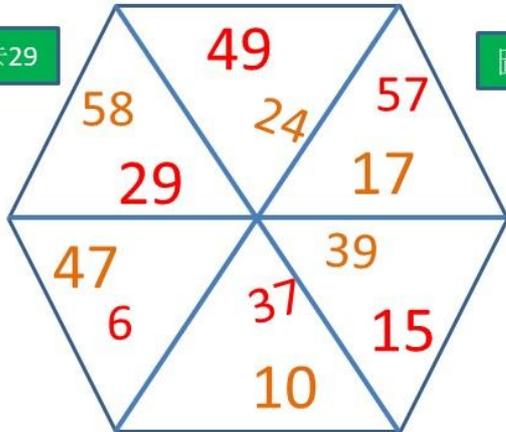
圖卡27



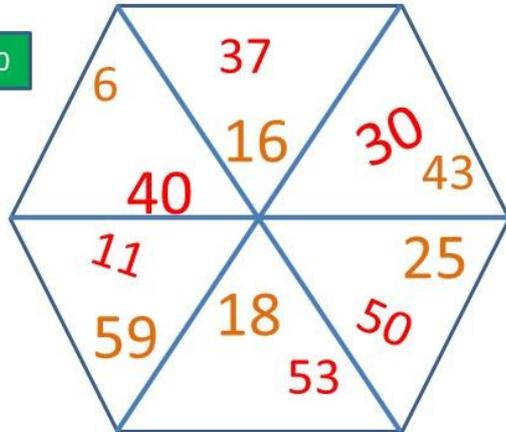
圖卡28



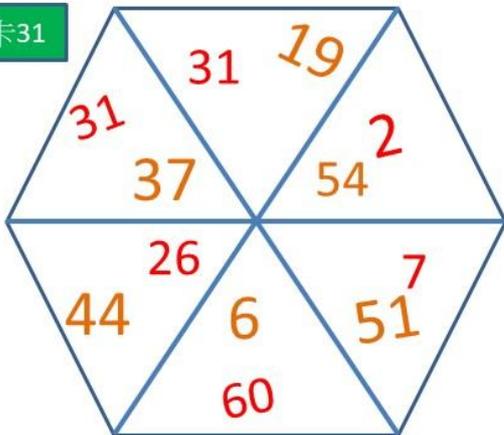
圖卡29



圖卡30

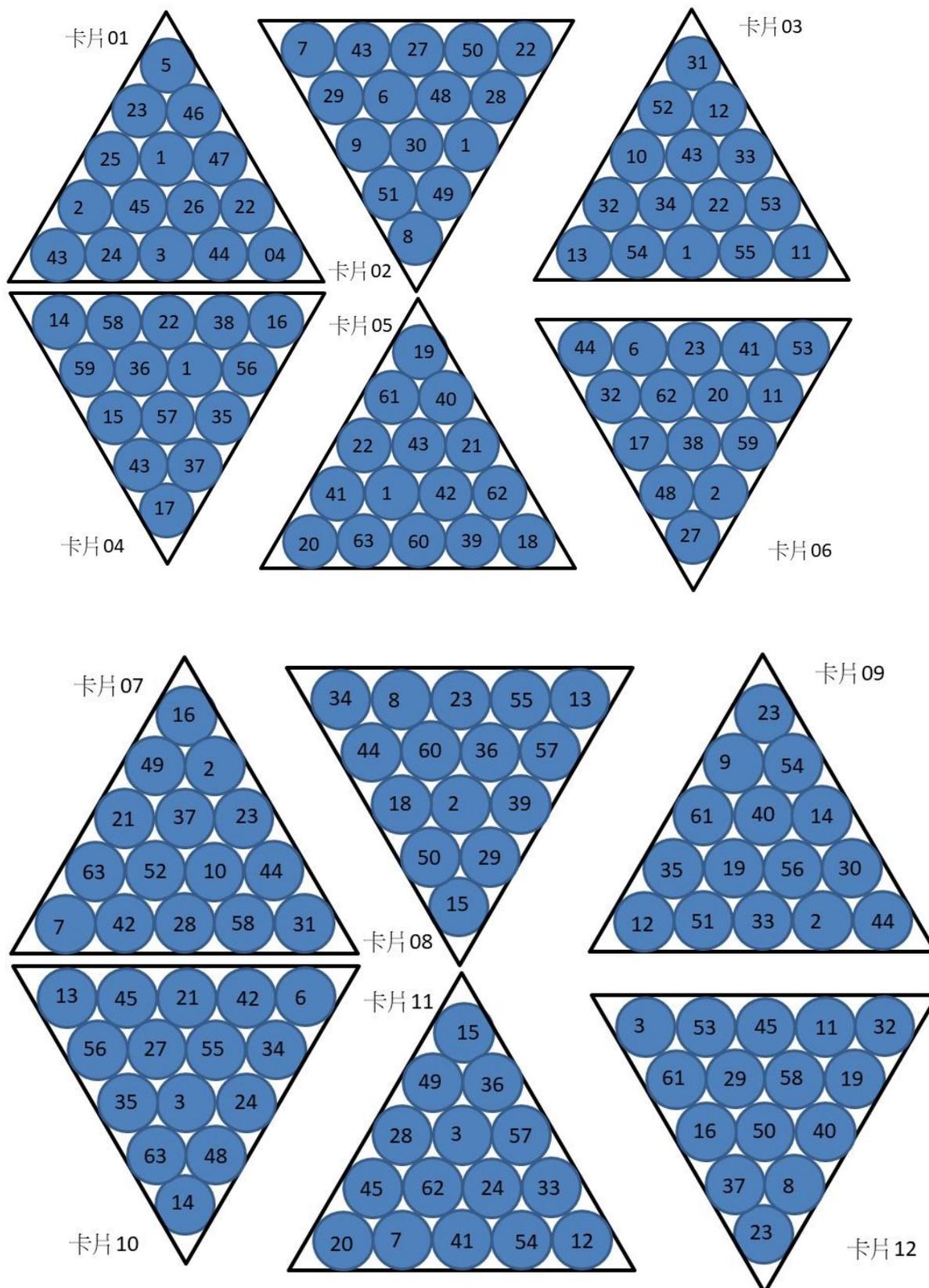


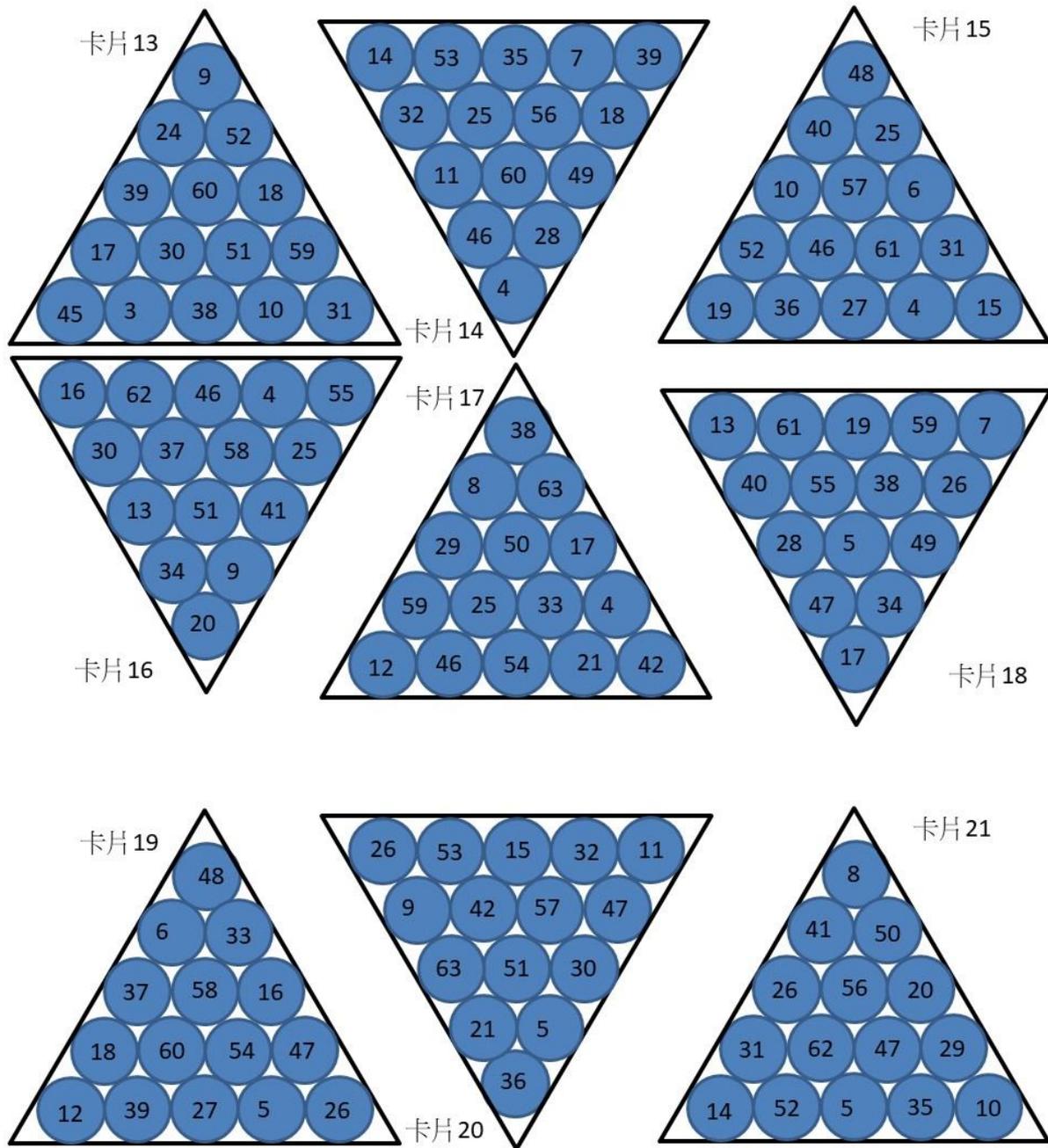
圖卡31



任兩張卡有 2 種圖案重複
 每張卡出現 $n(12)$ 個圖案，一副牌卡出現所有的總圖案數為 $m(62)$ ，總共有 $p(31)$ 張牌
 總卡片數 $p = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) + 1$ ，總圖案數
 $m = n \times \left(\frac{n}{2} - 1 \right) + 2$ ， $m = 2p$

二、每任兩張卡都會三種圖案重複





任兩張卡有 3 種圖案重複

每張卡出現 $n(15)$ 個圖案，一副牌卡出現所有的總圖案數為 $m(63)$ ，

總共有 $p(21)$ 張牌

總卡片數 $p = \frac{n}{3} \left(\frac{n}{3} - 1 \right) + 1$ ，總圖案數 $m = n \times \left(\frac{n}{3} - 1 \right) + 3$ ， $m = 3p$