臺南市 110 年度國中學生獨立研究競賽作品

作品名稱：萬形歸正之任意多邊形均可剪拼成正方形

編號：　　　　　　　　　　　　（由承辦單位統一填寫）

萬形歸正之任意多邊形均可剪拼成正方形

摘要

我們研究的主題是將幾何圖形剪拼成正方形，以下是我們研究所得到的結果：

一、任意兩個正方形分割成 5 塊後，可拼成一個正方形；任意三個正方形剪成 10 塊後，可拼成一個正方形。任意個正方形可剪拼成一個正方形。

二、邊長為整數(或小數或分數)的長方形可分割成數個正方形，最後可剪拼成正方形。

三、邊長為任意數的長方形可分割成 3 塊(或 4 塊)後，可拼成正方形。

四、兩邊長比為 1：m^2的長方形，可切割成 m 個邊長比為 1：m 的長方形，再拼成一個大的正方形。

五、兩股長為 1:2 的直角三角形分割成 2 塊後，可拼成正方形；兩股長為其他比的直角三角形分割成 2 塊後，可拼成長方形，最後可剪拼成正方形。

六、任意三角形分割成 6 塊後，可先拼成長方形，最後拼成正方形。

七、平行四邊形和梯形，可先拼成長方形，最後拼成正方形。

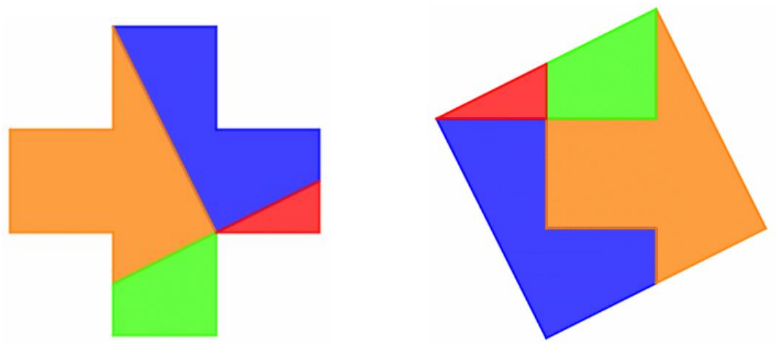
八、任意四邊形可先分割成兩個三角形後，可先拼成兩個長方形，最後拼成正方形。

九、任意凸 n 邊形可先分割成(n-1)個三角形後，可先拼成(m-1)個長方形，最後再拼成正方形。

十、任意邊長為直線的圖形可以剪拼正方形。

壹、研究動機

有一天上數學研究社的課，老師展示了如何將一個十字形圖形剪拼一個大的正方形。



我們幾位對數學很有興趣的同學覺得很神奇。就問老師其他情況可以達成嗎?老師說這個問題很大，你們若有興趣可以來研究一下，於是在我們的好奇心驅使下，我們就開始研究這個幾何剪拼問題。

貳、研究目的

一、數個相連的正方形可以剪拼成正方形嗎？
二、長方形可以剪拼成正方形嗎？
三、任意三角形可以剪拼成正方形嗎？
四、任意四邊形可以剪拼正方形嗎？
五、任意凸多邊形可以剪拼正方形嗎？
六、任意邊長為直線的圖形可以剪拼正方形嗎？

參、研究過程

首先，我們先研究兩個以上正方形是否可以剪拼成正方形？

一、數個相連的正方形可以剪拼成正方形

(一)兩個正方形的情況

1.已知正方形 ABCD、CEFG 均為正方形，且 $\overline{AB}=\mathrm{a}$，$\overline{CE}=\mathrm{b}$。若兩個正方形可拼成一個大的正方形，則面積和為a^2+b^2，因此，所拼成的正方形邊長=$\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}$，如下圖 1 所示。

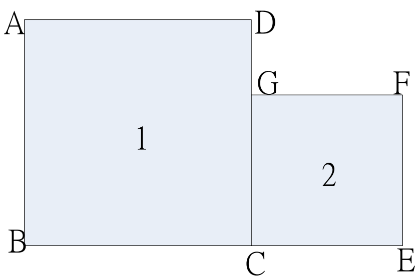


圖 1

2.我們在$\overline{BC}$上，取$\overline{BH}$ =b，可得 $\overline{AH} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BH}^2} = \sqrt{a^2+b^2}$，

$$\overline{EH} = \overline{BE} - \overline{BH} = (a+b) - b = a$$

，則$\overline{FH} = \sqrt{\overline{EH}^2 + \overline{EF}^2} = \sqrt{a^2+b^2}$ ，如下圖 2 所示：

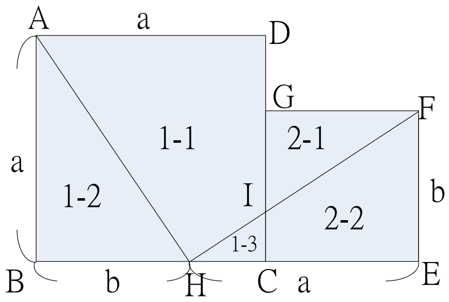


圖 2

3.將△ABH 與△EFH 移至相對應的位置，即可形成一個正方形 AHFA，如下圖所示：

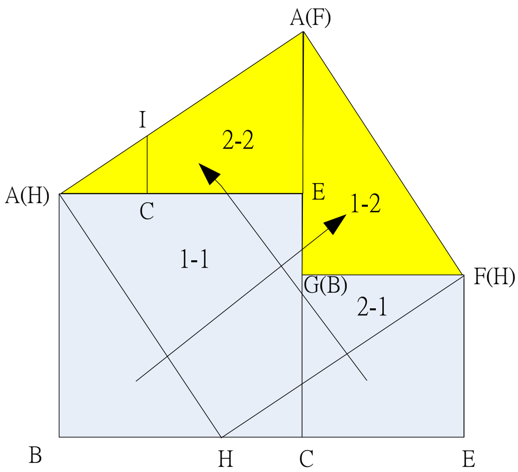


圖 3

4.我們將最後結果擺正，得到如下圖 4 的結果：

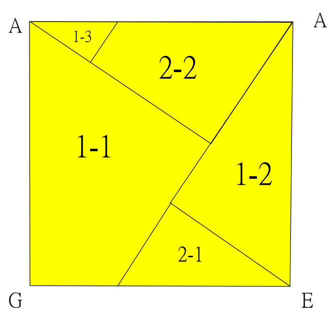


圖 4

由以上的過程，我們知道由兩個正方形所組成的圖形，可以把它們裁剪成 5 塊，如下圖

5 所示，然後就可以拼成一個大正方形。

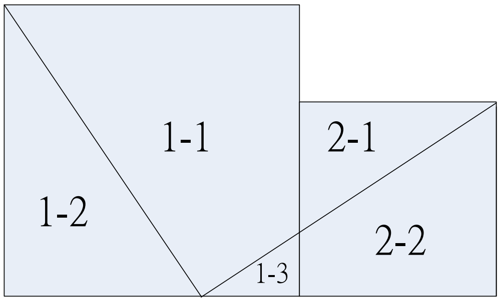
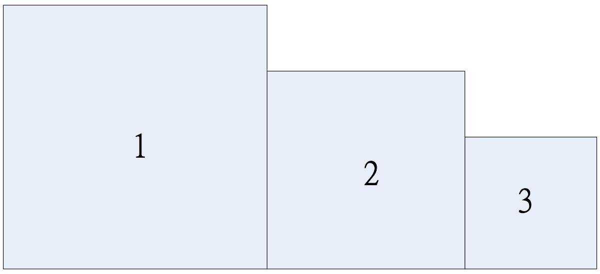
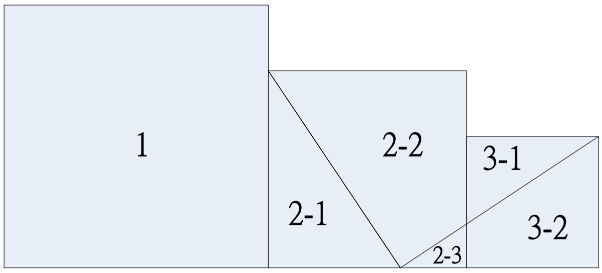
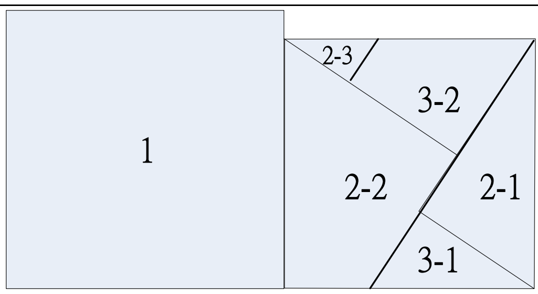
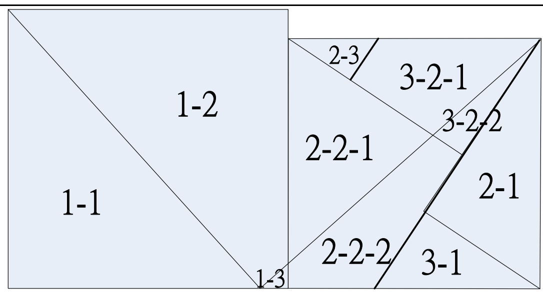


圖 5

(二)三個正方形的情況

處理完兩個正方形的情形，如果現在有三個正方形，我們可以剪拼成一個大正方形嗎?

我們發現只要借助上述兩個正方形拼成一個大正方形的方法，先將其中兩個面積較小的正方形剪拼成一個正方形，然後再把這個正方形跟第三個正方形剪拼成一個正方形，就可達成任務。

 圖 6	 圖 7
三個正方形，如圖 6 所示。	步驟 1-1：將較小的兩個正方形，拼成另一個正方形，如圖 7 所示。
 圖 8	 圖 9
步驟 1-2：將較小的兩個正方形，拼成另一個正方形，如圖 8 所示。	步驟 2-1：將步驟 1 拼成的正方形和原本最大的正方形，再剪成最後的正方形(註 1) ，如圖 9 所示。

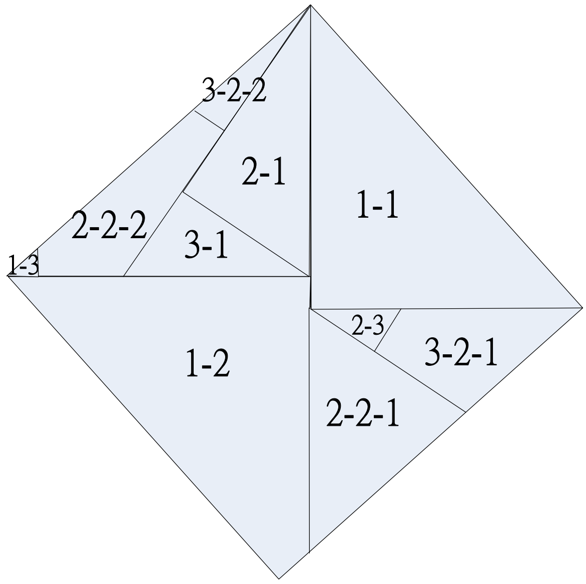


圖 10

步驟 2-2：最後剪拼成的正方形，如圖 10 所示。

由以上過程，我們利用反推的方式，可以將原本三個正方形裁剪成 10 塊後，就可拼成正方形，如圖 11 所示。

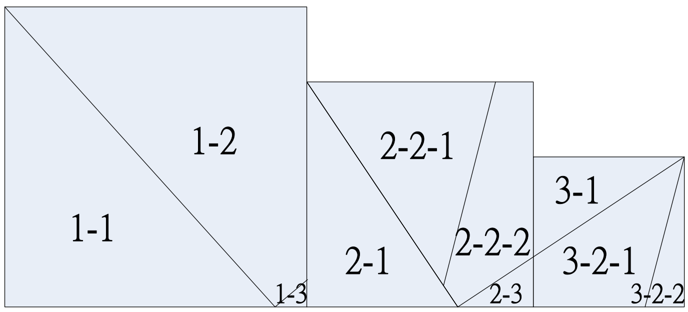


圖 11

註 1：我們將步驟 1-2 所拼成的正方形以不同邊跟原本最大的正方形相鄰，得到以下的結果，發現若要進行下一次的剪拼，需要將原本圖形裁剪成更多塊，如下圖 12~14。

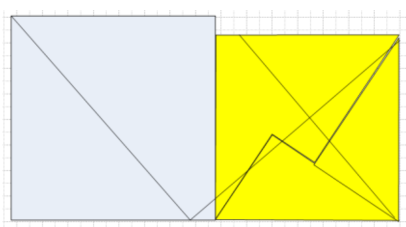


圖 12

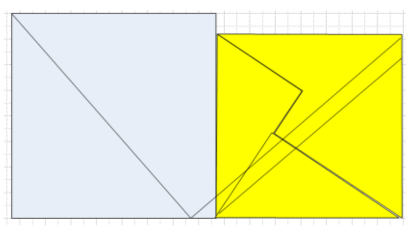


圖 13

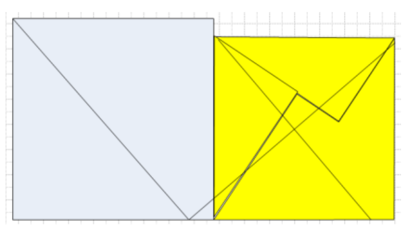


圖 14

(三)多個正方形的情況

不管正方形一開始有多少個，利用上述「兩個正方形剪拼一個大正方形的方法」重複利用這個「滾雪球」式的方法，不斷將兩個正方形剪拼成一個正方形，直到最後只剩一個大正方形為止。因此，我們得到任意多個正方形都能剪拼成一個大正方形。

以下我們再舉四個正方形剪拼成一個大的正方形的例子，就可清楚知道，這個方法是可行的。將原本的四個正方形如下圖 15 的方式剪開，即可拼成如下圖 16 的正方形。

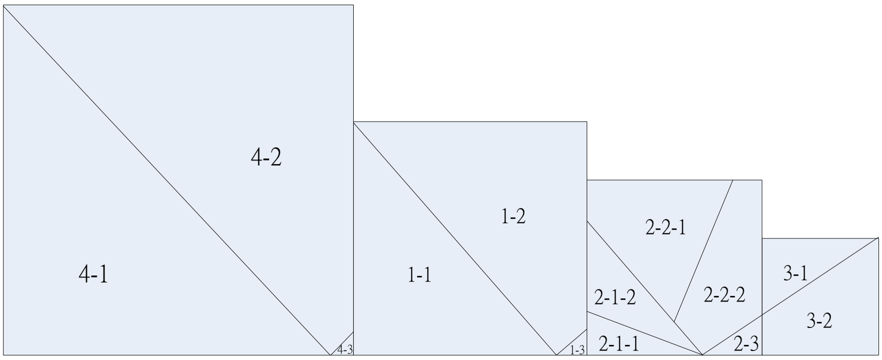


圖 15

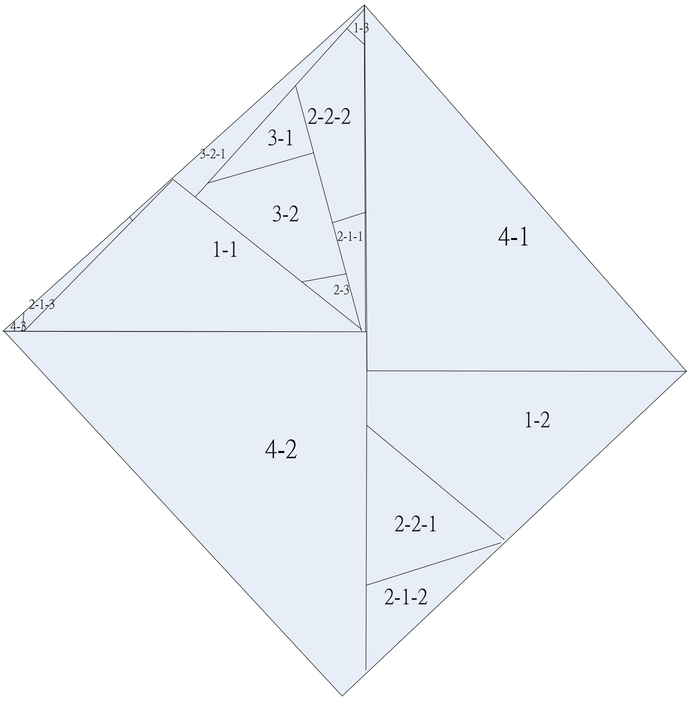


圖 16

二、長方形可以剪拼成正方形

處理完數個正方形可剪拼成正方形的問題後，我們開始研究單一圖形是否可剪拼成正方形，以下我們先從長方形開始研究。我們利用各種不同的方式來進行研究。

(一)長方形是否可以先分成數個正方形

由前面第一點任意個正方形都可以剪拼成一個大的正方形，因此，接著我們就思考一個長方形是否可以先分成數個正方形?以下是我們研究的過程。

1.邊長為正整數的情況

我們首先考慮邊長為正整數的情況：我們先假定長方形邊長均為正整數，我們先令短邊長為 5，再依長邊長除以 5 可能的情況，可將長邊的長度以 5n、5n+1、5n+2、5n+3、5n+4 來表示。

(1)若長邊為 5n，則長方形可分成 n 個 5× 5 的正方形，如圖 15 所示：

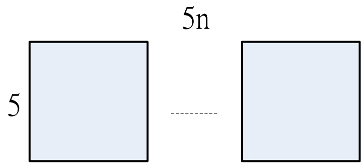


圖 15

(2)若長邊為 5n+1，則長方形可分成 n 個5×5的正方形和 5 個 1×1 的正方形，如圖 16 所示：

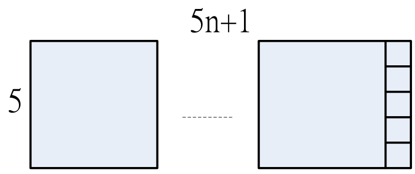


圖 16

(3)若長邊為 5n+2，則長方形可分成 n 個 5×5 的正方形、2 個 2×2 的正方形和 2 個 1×1 的正方形，如圖 17 所示：

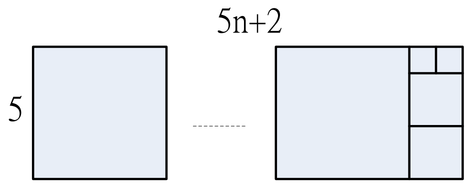


圖 17

(4)若長邊為 5n+3，則長方形可分成 n 個 5×5 的正方形、1 個 3×3 的正方形，1 個 2×2 的正方形和 2 個 1×1 的正方形，如圖 18 所示：

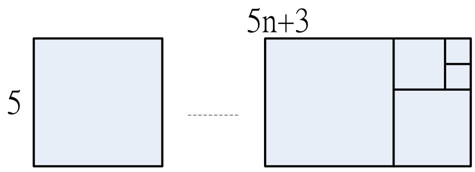


圖 18

(5)若長邊為 5n+4，則長方形可分成 n 個 5×5 的正方形、1 個4×4 的正方形和 4 個 1×1 的正方形，如圖 19 所示：

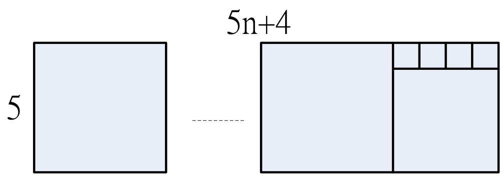


圖 19

由以上分析可得長方形一邊長為 5，另一邊長不管為何，都可以將長方形分成數個正方形，再藉由上述「數個正方形可剪拼成另一個正方形」的方法，可將原長方形剪拼成一個大的正方形。

由以上的結果，我們可以推論：「若一個長方形相鄰兩邊均為正整數，均可將長

方形分成數個正方形。」

老師告訴我們可以利用輾轉相除法，輕易將一個長方形分解成數個正方形。我們以下例：相鄰兩邊長為 4 和 15 來說明，分解過程如下圖 20 所示：

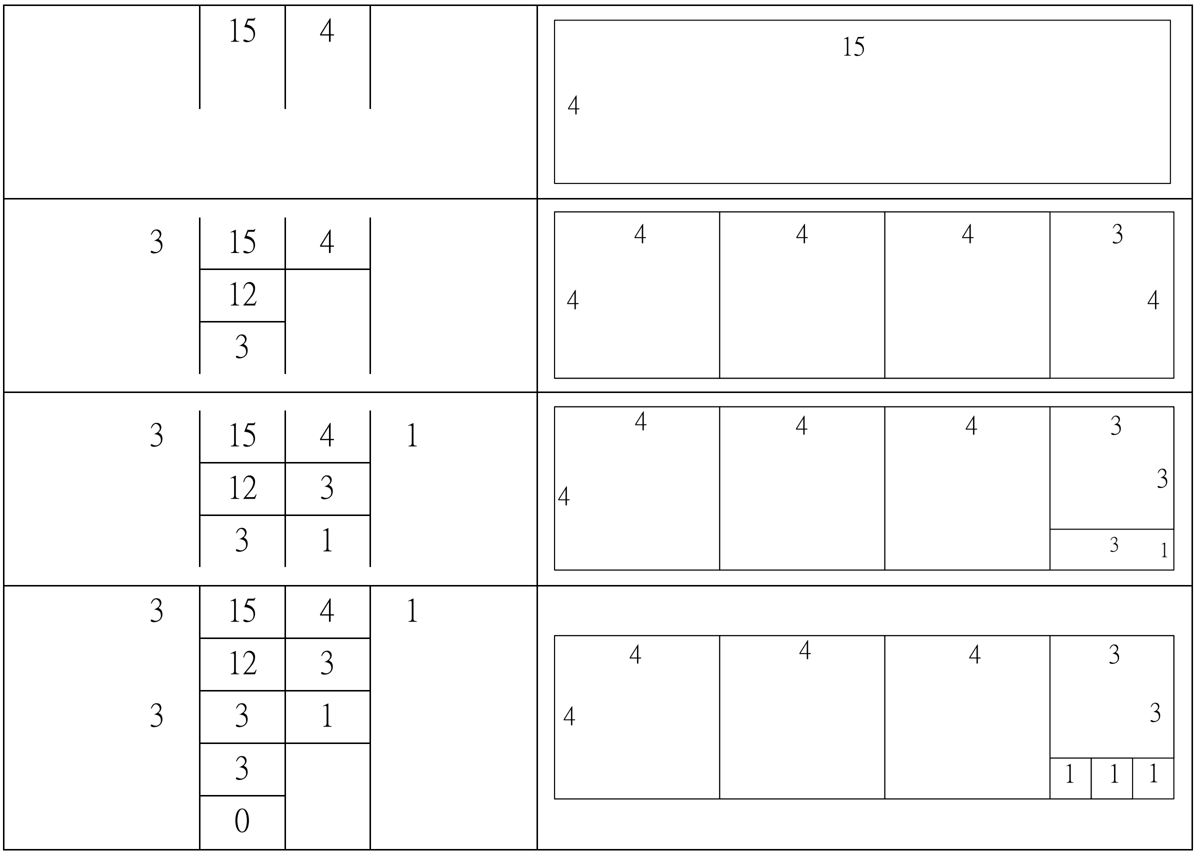


圖 20

由以上可得相鄰兩邊長為 4 和 15 的長方形可分成 3 個 4×4 的正方形、1 個 3×3 的正方形和 3 個 1×1 的正方形。

2.邊長為分數(小數)的情況

我們更進一步地思考，不是每一個長方形邊長均為正整數，如果有邊長是分數或小數呢？我們發現若邊長為分數或小數，可以先將長和寬的比化成最簡正整數比，因此，也可以使用輾轉相除法將長方形成數個正方形。

我們以下例：相鄰兩邊長為$\frac{2}{3}$和$\frac{5}{2}$的長方形來說明：

已知$\frac{2}{3}:\frac{5}{2}=4:15$，因此可得相鄰兩邊長為$\frac{2}{3}$和$\frac{5}{2}$的長方形可分成 3 個$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$的正方形、1 個$\frac{2}{2}\times\frac{1}{2}$的正方形和 3 個$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$的正方形。

3.邊長為任意數的情況

但是我們知道數除了正整數、小數和分數外，還有一種數稱為無理數(它無法表示成分數)，若長方形其中有一個邊長為無理數，此長方形就不可能先分解成數個正方形。

例如：有一個長方形相鄰兩邊長為 1 和$\sqrt{2}$，則這個長方形就無法分解成數個

正方形。

因此，我們必須想一個可以適用於任意數的方法：

(二)長方形邊長為任意數時，可直接剪拼成正方形的方法

以下是我們所找到的方法，可以處理長方形相鄰兩邊長為任意數時，可直接剪拼成正方形。根據研究的結果，我們將長方形依長與寬的比值，分成三種情況進行說明。

1.長與寬的比值小於 4 時

(1)假設在長方形 ABCD 中，$\overline{AB}$＝a，$\overline{BC}$＝b，則與它面積相等的正方形邊長就應該為$\sqrt{ab}$，如圖 21 所示：

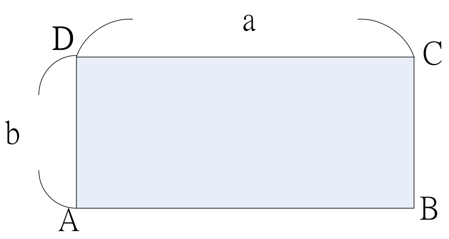


圖 21

(2)在$\overline{CD}$上擷取$\overline{DG}$＝$\sqrt{ab}$，在$\overline{AB}$上擷取$\overline{BH}$＝$\sqrt{ab}$。如圖 22 所示：

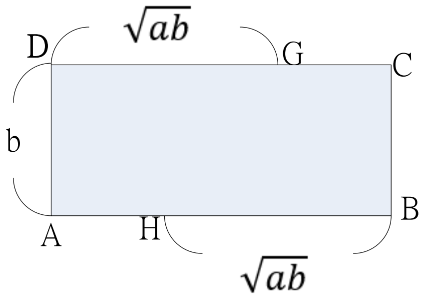


圖 22

(3)連接$\overrightarrow{CH}$，與$\overline{AD}$的延長線交於點 E。過 G 做$\overline{CD}$的垂線，過 E 做$\overline{DE}$的垂線，設兩垂線交於 F 點。$\overline{GF}$與$\overline{CE}$交於 M，$\overline{GF}$與$\overline{AB}$交於 N。如圖 23 所示：

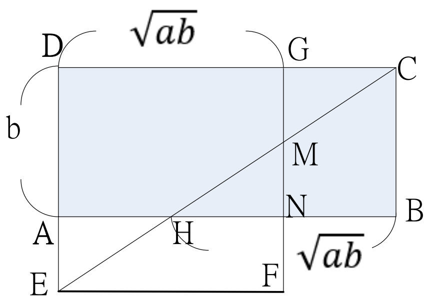


圖 23

(4)將△HBC 沿著$\overline{CE}$往下滑，使得△HBC 與△EFM 重合，將△GMC 沿著$\overline{CE}$往下滑，使得△GMC 與△AEH 重合。如圖 24 所示：

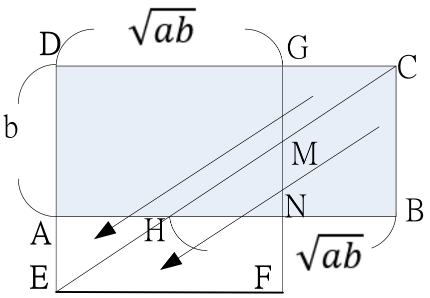


圖 24

(5)可得到最後的正方形 DEFG。如圖 25 所示：

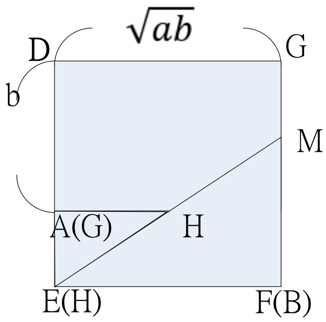


圖 25

我們利用反推的方式，將原本長方形切割成 3 塊後，就可拼成正方形，如圖 26 所示：

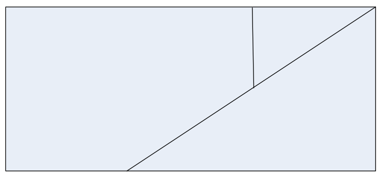


圖 26

以上剪拼過程真的可以把一個長方形剪拼成一個正方形嗎?

以下是我們的推導：

由步驟（2）和 3 可得$\overline{CG}=\overline{CD}-\overline{DG}=a-\sqrt{ab}=\overline{BN}$

由步驟（3）可得$\overline{HN}=\overline{BH}-\overline{BN}=\sqrt{ab}-\left(a-\sqrt{ab}\right)=2\sqrt{ab}-a$

由步驟（4）可得，利用平行線截等比例線段性質

$\overline{HN}:\overline{HB}=\overline{NM}:\overline{BC}$

將各線段長代入，可得

$\left(2\sqrt{ab}-a\right):\sqrt{ab}=\overline{NM}:\mathrm{b}$

$\sqrt{ab}\times\overline{NM}=2\mathrm{b}\sqrt{ab}-\mathrm{ab}$

$\overline{NM}=\frac{2b\sqrt{ab}-ab}{\sqrt{ab}}=2\mathrm{b}-\sqrt{ab}$

則$\overline{GM}=\overline{GN}-\overline{MN}=\mathrm{b}-\left(2b-\sqrt{ab}\right)=b-2b+\sqrt{ab}=\sqrt{ab}-\mathrm{b}=\overline{AE}$

$\overline{DE}=\overline{DA}+\overline{AE}=\mathrm{b}+\sqrt{ab}-\mathrm{b}=\sqrt{ab}=\overline{DG}$

因此，四邊形 DEFG 為正方形。

2.長與寬的比值等於 4 時

我們發現當$\overline{CD}:\overline{AD}$ =a：b= 4：1 時，即 a= 4b，$\overline{NM}=\frac{2b\sqrt{ab}-ab}{\sqrt{ab}}=2b-\sqrt{ab}=2b-\sqrt{4b^2}=2b-2b=0$，也就是 M 和 N 是同一點。

以下是我們詳細的說明：

(1)令 a= 4r，b= r ，如圖 27 所示：

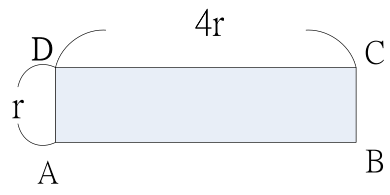


圖 27

(2)在$\overline{CD}$上擷取$\overline{DG}=\sqrt{ab}=\sqrt{4r^2}=2r$，在$\overline{AB}$上擷取$\overline{BH}=\sqrt{ab}=\sqrt{4r^2}=2r$。如圖 28 所示：

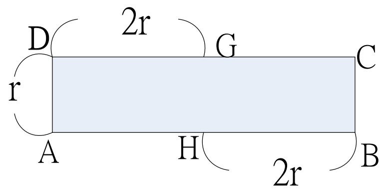


圖 28

(3)連接$\overrightarrow{CH}$，與$\overline{AD}$的延長線交於點 E。過 G 做$\overline{CD}$的垂線，過 E 做$\overline{DE}$的垂線，設兩垂線交於 F 點。如圖 29 所示：

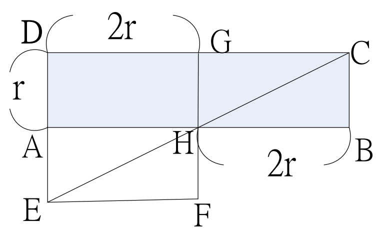


圖 29

(4)將△HBC 沿著$\overline{CE}$往下滑，使得△HBC 與△EFH 重合，將△GHC 沿著$\overline{CE}$往下滑，使得△GHC 與△AEH 重合。如圖 30 所示：

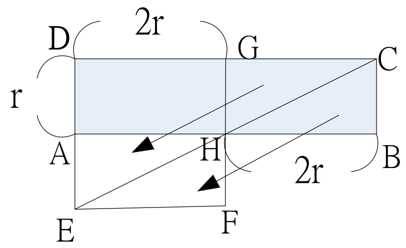


圖 30

(5)可得到最後的正方形 DEFG。如圖 31 所示：

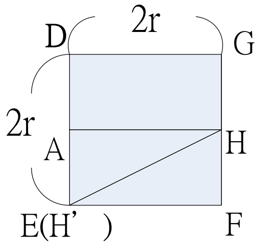


圖 31

我們利用反推的方式將原本長方形應該如何切割展示如下圖，最後發現需要將原本的長方形切割成 3 塊後，就可拼成正方形，如圖 32 所示。

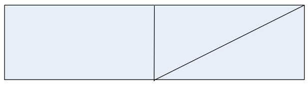


圖 32

以上剪拼過程真的可以把一個長方形剪拼成一個正方形嗎?

以下是我們的推導：

$\overline{AE} = \overline{GH} = \overline{DA} = r = \overline{BC} = \overline{HF}$

$\overline{DE} = \overline{DA} + \overline{AE} = r + r = 2r = \overline{DG}$

則四邊形 DEFG 為正方形

3.長與寬的比值大於 4 時

(1) 假設在長方形 ABCD 中，$\overline{CD}$＝a，$\overline{AD}$＝b，且$\frac{a}{b} > 4$ 則與它面積相等的正方形邊長就應該是 $\sqrt{ab}$。如圖 33 所示。

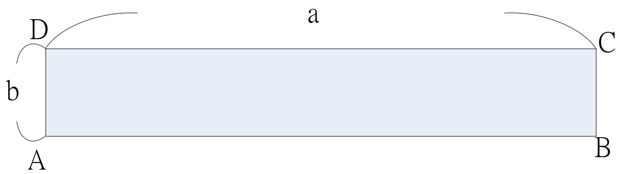


圖 33

(2)在$\overline{CD}$上擷取$\overline{DG}$＝$\sqrt{ab}$，在$\overline{AB}$上擷取$\overline{BH}$＝$\sqrt{ab}$。如圖 34 所示。

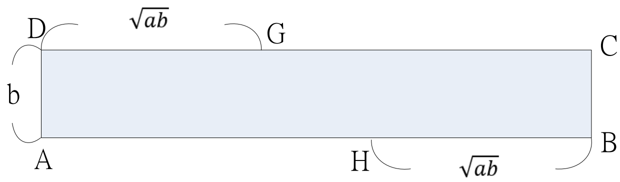


圖 34

(3)連接$\overrightarrow{CH}$，與$\overline{AD}$的延長線交於點 E。過 G 做$\overline{AB}$的垂線，過 E 做$\overline{AD}$的垂線，設兩垂線交於 F 點。$\overline{GF}$與$\overline{CE}$交於 N，$\overline{GF}$與$\overline{AB}$交於 M。如圖 35 所示。

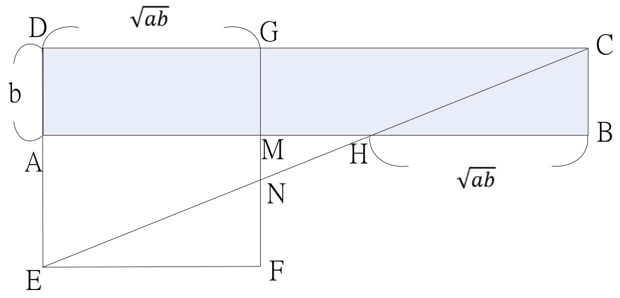


圖 35

(4)將△HBC 沿著$\overline{CE}$往下滑，使得△HBC 與△EFN 重合，將四邊形 GMBC 沿著$\overline{CE}$往下滑，使得四邊形 GMBC 與△AEH 的∠C與∠MHN重合。如圖 36 所示。

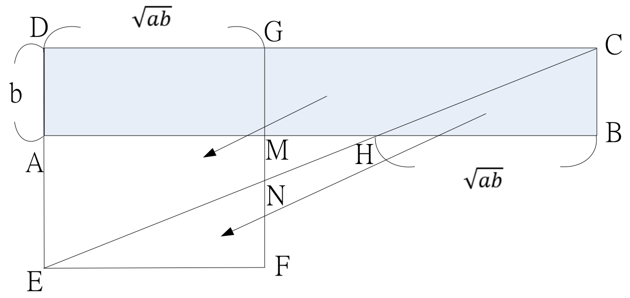


圖 36

(5)再將△ MNC’ 移至△EHM 處，如圖 37 所示。

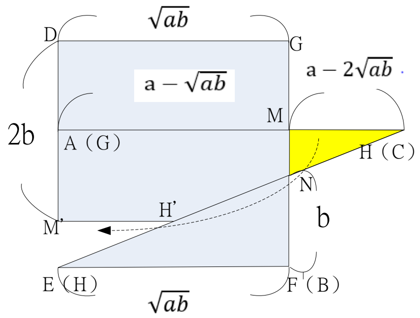


圖 37

(6)最終可拼成一個正方形 DEFG。如圖 38 所示。

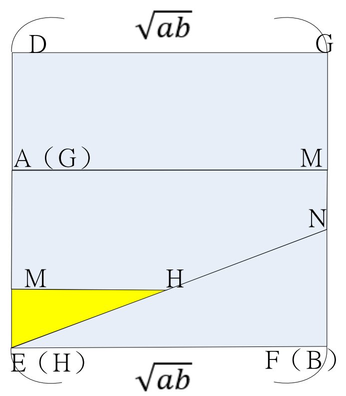


圖 38

我們利用反推的方式，將原本長方形切割成 4 塊後，就可拼成正方形，如圖 39 所示。

圖 39

以上剪拼過程真的可以把一個長方形剪拼成一個正方形嗎?

以下是我們的推導：

將四邊形 AM’H’C，表示如圖 40。

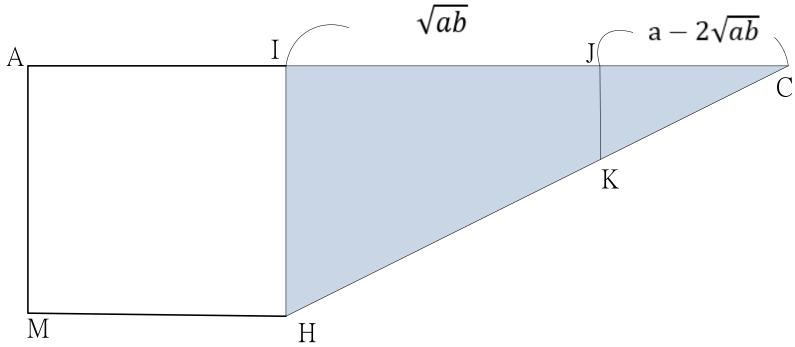


圖 40

已知$\overline{DG}=\sqrt{ab}$，$\overline{DA}=b=\overline{GM}=\overline{AM'}$，則$\overline{DM'}=2b$

$\overline{CZ}=\sqrt{ab}$，$\overline{IH}=b$，$\overline{GJ}=\sqrt{ab}$

則$\overline{JC}=\overline{CD}-\overline{bG}-\overline{GJ}=a-2\sqrt{ab}$

利用平行線截等比例線段性質

$\overline{JC}:\overline{CI}=\overline{JK}:\overline{IH}$

$\left(a-2\sqrt{ab}\right)\sqrt{ab}=X:b$

$\overline{JK}\sqrt{ab}=ab-2b\sqrt{ab}$

$\overline{JK}=\frac{ab}{\sqrt{ab}}-\frac{2b\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}-2b=\overline{M'\mathrm{E}}$

$\overline{DE}=\overline{DA}+\overline{AM'}+\overline{M'\mathrm{E}}=b+b+\sqrt{ab}-2b=\sqrt{ab}$

因此，可得四邊形 DEFG 為正方形。

(三)其他特殊情況

接著我們發現若長方形相鄰的兩邊有特殊的比時，可以很輕易的直接剪拼成正方形。

1.邊長為 1：4 的情況

(1)設兩邊長度分別為 r 和$4\mathrm{r}$，此時，長方形面積為 r$\times 4\mathrm{r}=4r^2$，若可剪拼成正方形，則該正方形邊長= $\sqrt{4r}=2\mathrm{r}$，如圖 41 所示。

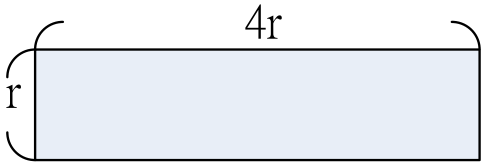


圖 41

(2)將邊長為 4r 的邊剪成 2 段長度為 2r 的線段，如圖 42 所示。

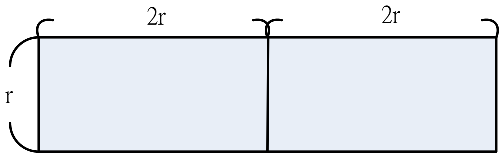


圖 42

(3)將 2 個長方形拼接在一起，即可得到正方形，如圖 43 所示。

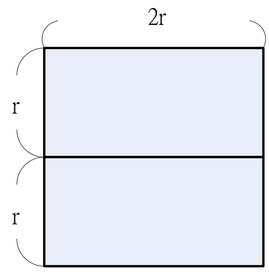


圖 43

2.邊長為 1：m^2的情況

(1)設兩邊長度分別為 r 和m^2r，此時，長方形面積$= \mathrm{r} \times m^2 r = m^2 r^2$，若可剪拼成正方形，則該正方形邊長為$\sqrt{m^2 r^2} = \mathrm{mr}$，如圖 44 所示。

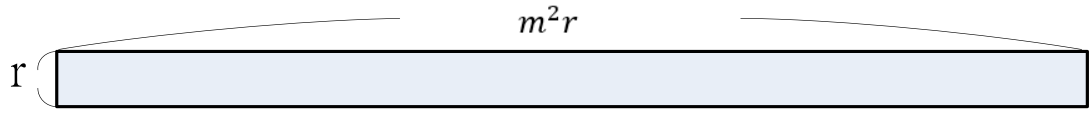


圖 44

(2)將m^2r 那邊剪成長度為 mr 的長方形 m 段，如圖 45 所示。

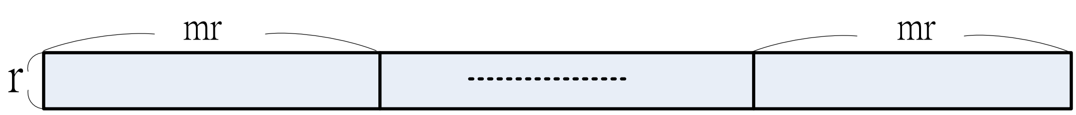


圖 45

(3)將 m 個長方形相鄰拼接在一起，即可得到正方形，如圖 46 所示。

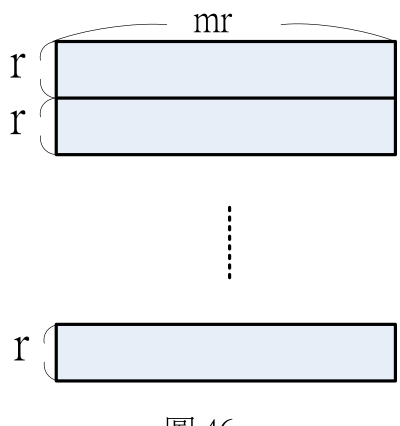


圖 46

由以上可知，我們得到兩邊長比為 1：m^2的長方形，則可將原長方形切割成 m 個邊長

比為 1：m 的長方形，再拼成一個大的正方形。

三、三角形可以先剪拼成長方形，再剪拼成正方形。

接下來我們討論三角形是否可剪拼成正方形，首先我們研究直角三角形

(一)直角三角形

1.兩股的邊長比為 1:2 的情況

(1)假設在ΔABC中，$\overline{AB} \perp \overline{BC}$，且$\overline{AB}$＝2r，$\overline{BC}$＝r，則與它面積相等的正方形邊長就應該是r，如圖 47 所示。

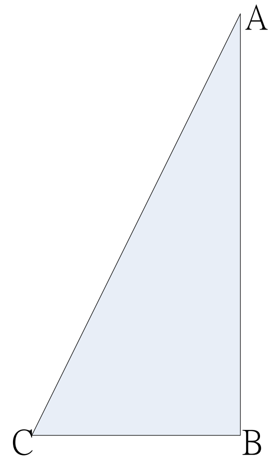


圖 47

(2)分別取$\overline{AC}$、$\overline{AB}$的中點 D、E，將ΔADE 以 D 為轉點，轉到$\overline{AD}$與$\overline{CD}$重合，如圖 48 所示。

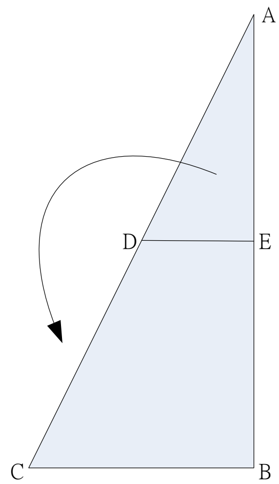


圖 48

(3) 最後可拼成一個正方形 CBEE，如圖 49 所示。

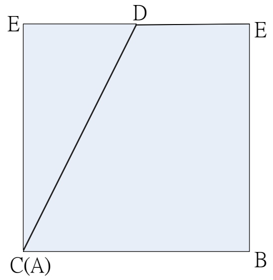


圖 49

我們利用反推的方式，將原本直角三角形切割成 2 塊後，就可拼成正方形，如圖 50 所示。

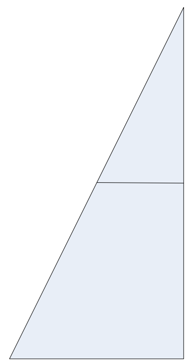


圖 50

推導如下：

已知取 D、E 分別為$\overline{AC}$、$\overline{AB}$的中點，則$\overline{BE}=\overline{AE}=\overline{CE}=\frac{1}{2}\overline{AB}=r$，$\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}r$，則

$\overline{EE}=\overline{ED}+\overline{DE}=\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}r=r$。

因此，四邊形 CBEE 為正方形。

2.兩股的邊長比不為 1:2 的情況

(1)假設在ΔABC中，$\overline{AB}$＝c，$\overline{BC}$＝a，且$a:c\neq 1:2$，如圖 51 所示。。

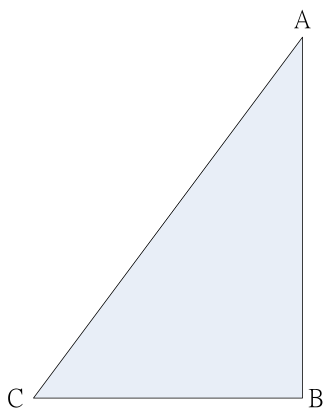


圖 51

(2)分別取$\overline{AC}$、$\overline{AB}$的中點 D、E，將ΔADE以 D 為轉點轉到$\overline{AD}$與$\overline{CD}$重合，如圖 51 所示。

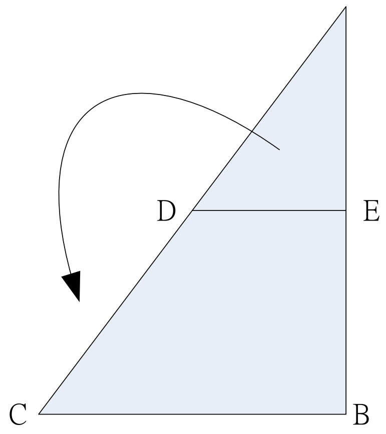


圖 52

3.拼成一個長方形 CBEE，如圖 53 所示。

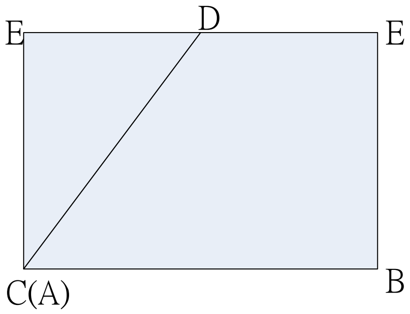


圖 53

推導如下：

已知：△ABC 為直角△，∠B$=90°$

D、E 分別為$\overline{AB}$、$\overline{AC}$中點，$\overline{AB}=a$，$\overline{DE}=b$

則△ABC 面積$=\frac{1}{2}$ab

四邊形 CBEE 為長方形，$\overline{DB}=\frac{1}{2}$a，$\overline{BC}=b$

長方形 CBEE 面積$=\frac{1}{2}$ab=△ABC 面積

由以上研究我們得到：任意一個直角三角形都能夠剪拼成長方形，再由長方形可剪拼成一個正方形。

(二)任意三角形的情況：

1.有一個任意三角形 ABC，如圖 54 所示。

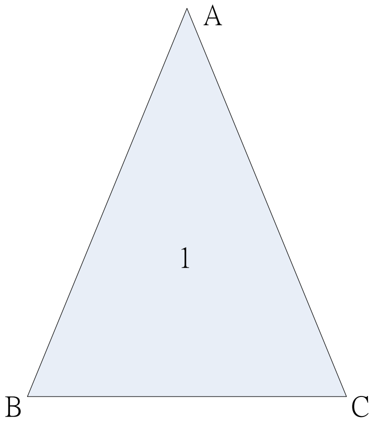


圖 54

2.取$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中點 D、F，作$\overline{AE} \perp \overline{DF}$，如圖 54 所示。。

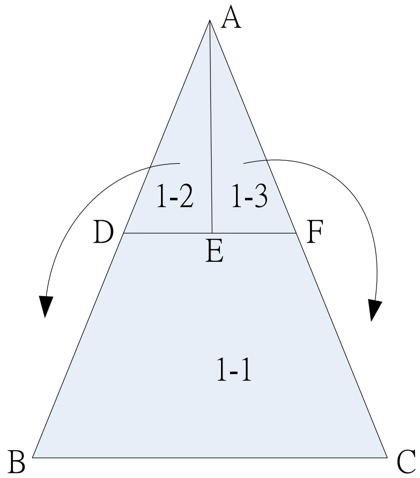


圖 55

2.將△ADE 和△AEF 分別以 D、F 為轉點，往下翻轉，使得四邊形 BCEE 為長方形，如圖 55 所示。。

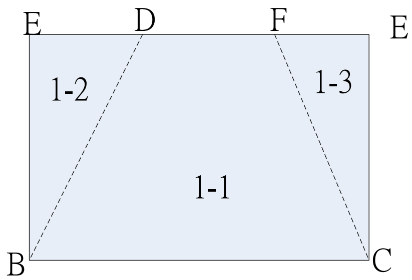


圖 56

3.依照長方形剪拼成正方形的方法，可將圖形再剪拼成正方形，如圖 57~圖 59 所示。。

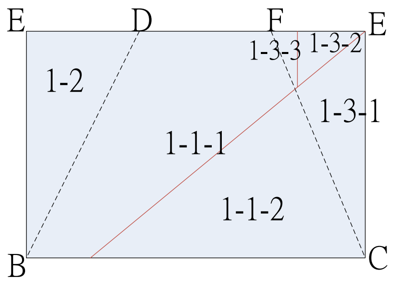


圖 56

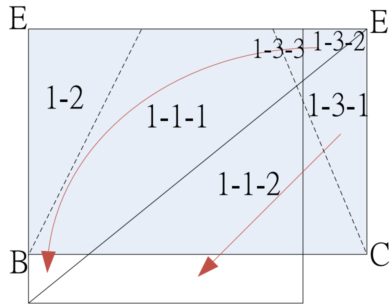


圖 58

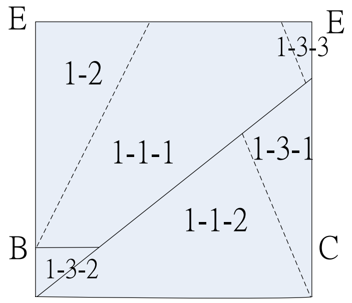


圖 59

我們利用反推的方式將原本三角形切割成 6 塊後，就可拼成正方形，如圖 60 所示。

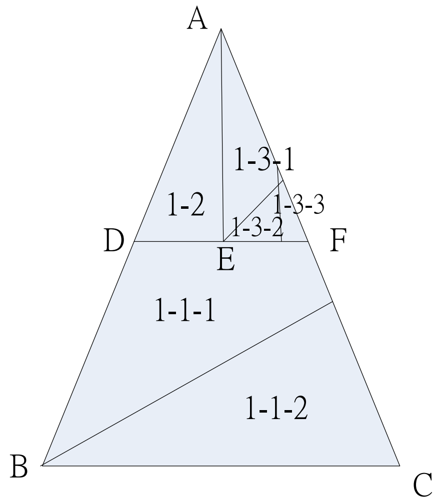


圖 60

四、任意四邊形可以剪拼成正方形。

我們先討論平形四邊形的情況，如下所示：

(一)平行四邊形

1.四邊形 ABCD 為平行四邊形，如圖 61 所示。

圖 61

2.作$\overline{BE} \perp \overline{CD}$，將△BCE 往左移，如圖 62 所示。

圖 62

3.可剪拼一個長方形 ABEE，如圖 63 所示。

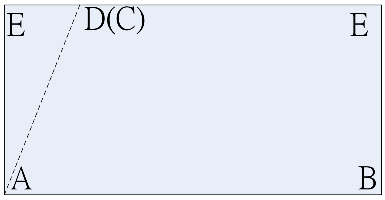


圖 62

由以上過程可得：任意一個平行四邊形都能夠剪拼成長方形，再由長方形可剪拼成一個正方形。因此，任意一個平行四邊形都能夠剪拼成正方形。

接著我們繼續討論梯形的情形，如下所示：

(二)梯形

1.四邊形 ABCD 為平行四邊形，如圖 64 所示。

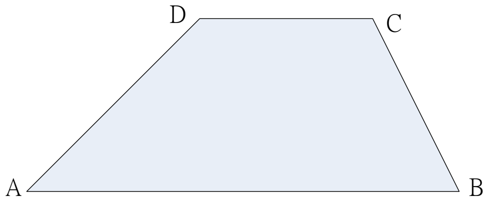


圖 64

2. 分別取$\overline{BC}$、$\overline{DA}$、$\overline{CD}$中點 E、F、G，且作$\overline{GH} \perp \overline{EF}$，如圖 65 所示。

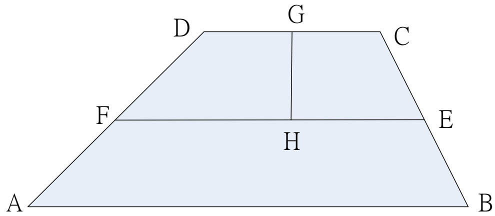


圖 65

3.將四邊形 ECGH、FHGD 分別以 E、F 為轉點，往下旋轉，使得四邊形 GGHH 為長方形，如圖 65 所示。

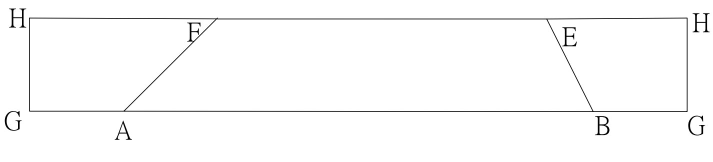


圖 66

由以上過程可得：任意一個梯形都能夠剪拼成長方形，再由長方形可剪拼成一個正方形。因此，任意一個梯形都能夠剪拼成正方形。

(三)任意一個四邊形都可以剪拼成一個正方形

1. 任意四邊形 ABCD，如圖 67 所示。

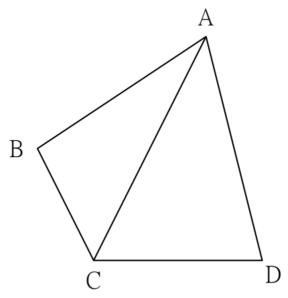


圖 67

2. 連接$\overline{AC}$，將四邊形 ABCD 分別兩個三角形，ΔABC 和ΔACD，如圖 68 所示。

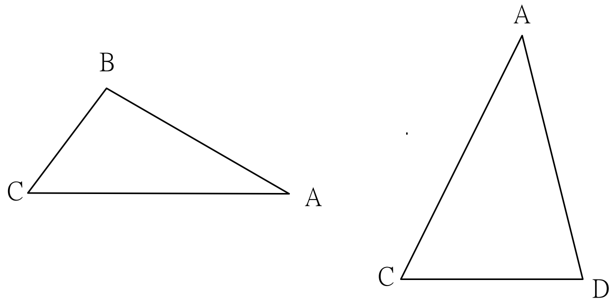


圖 68

3.分別將兩個三角形，剪拼成長方形，如圖 69 所示。

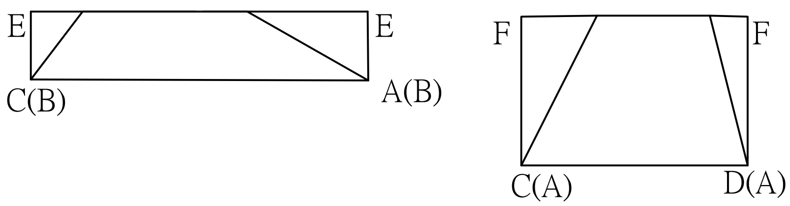


圖 69

由以上過程可得：任意一個四邊形都能夠剪拼成兩個長方形，再由長方形可剪拼成正方形，所拼成的兩個正方形，又可拼成一個大的正方形。因此，任意一個四邊形都能夠剪拼成正方形。

五、任意凸多邊形可以剪拼成正方形。

我們以五邊形舉例說明：

1. 任意五邊形 ABCDE，如圖 70 所示。

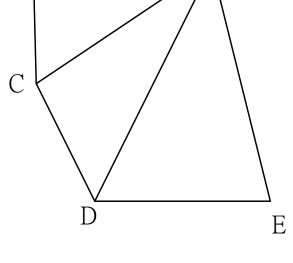


圖 70

2. 連接$\overline{AC}$和$\overline{AD}$，將五邊形 ABCDE 分別三個三角形，ΔABC、ΔACD 和ΔADE，如圖 71 所

示。

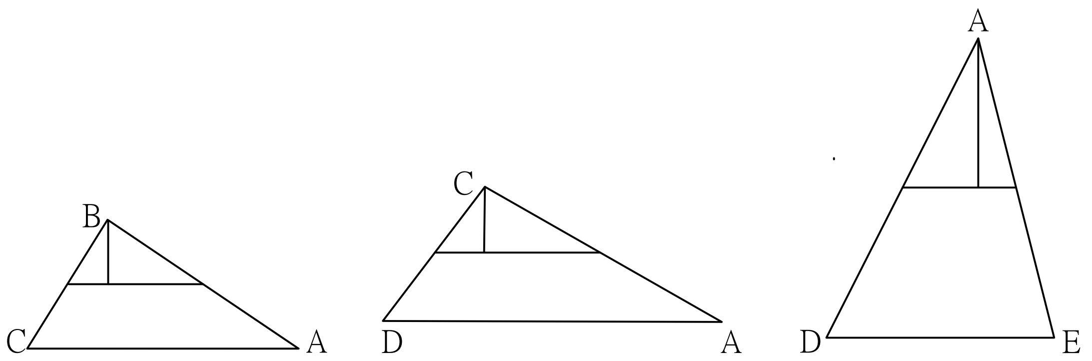


圖 71

3.分別將三個三角形，剪拼成長方形，如圖 72 所示。

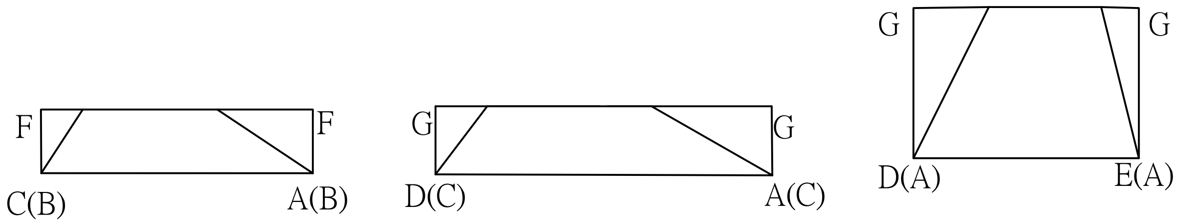


圖 72

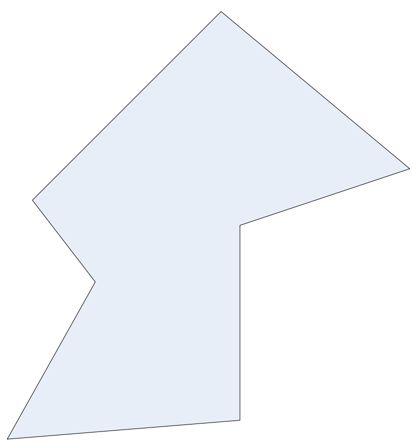
由以上過程可得：任意一個五邊形都能夠剪拼成三個長方形，再由長方形可剪拼成正方形，所拼成的三個正方形，又可拼成一個大的正方形。因此，任意一個五邊形都能夠剪拼成正方形。

因此，對於任意一個 n 邊形都能夠剪拼成(n-1)個長方形，再由長方形可剪拼成正方形，所拼成的(n-1)個正方形，又可拼成一個大的正方形。所以，任意一個 n 邊形都能夠剪拼成正方形。

六、任意邊長為直線的圖形可以剪拼正方形。

我們以下圖來進行說明：

若有一個圖形的邊長均為直線如下左圖 73 所示，則可行分割成 5 個三角形如下右圖 74 所示：



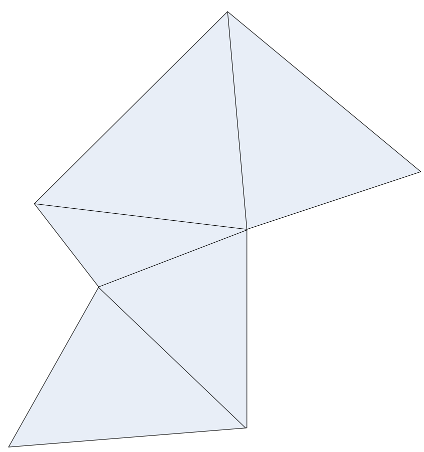


圖 73　　　　　　　　　　　　　　　圖 74

接著將三角形剪拼成長方形，再來剪拼成正方形，最後將數個正方形剪拼成最後的正方形。

肆、結論

一、任意兩個正方形分割成 5 塊後，可拼成一個正方形；任意三個正方形剪成 10 塊後，可拼成一個正方形。任意個正方形可剪拼成一個正方形。

二、邊長為整數(或小數或分數)的長方形可分割成數個正方形，最後可剪拼成正方形。

三、邊長為任意數的長方形可分割成 3 塊(或 4 塊)後，可拼成正方形。

四、兩邊長比為 1：m^2的長方形，可切割成 m 個邊長比為 1：m 的長方形，再拼成一個大的正方形。

五、兩股長為 1:2 的直角三角形分割成 2 塊後，可拼成正方形；兩股長為其他比的直角三角形分割成 2 塊後，可拼成長方形，最後可剪拼成正方形。

六、任意三角形分割成 6 塊後，可先拼成長方形，最後拼成正方形。

七、平行四邊形和梯形，可先拼成長方形，最後拼成正方形。

八、任意四邊形可先分割成兩個三角形後，可先拼成兩個長方形，最後拼成正方形。

九、任意凸 n 邊形可先分割成(n-1)個三角形後，可先拼成(m-1)個長方形，最後再拼成正方形。

十、任意邊長為直線的圖形可以剪拼正方形。

伍、參考資料

一、網站：http://203.72.56.75/~pingfeng/geogebra/htm/04/4-2-4.pdf